Laplacetransformierte dissipativer Distributionen auf R^m_+

– Diplomarbeit –

Der Abteilung Mathematik der Universität Dortmund vorgelegt
im Mai 1983 von Hubert Gesing

(Überarbeitet im Oktober 1983)

Inhaltsverzeichnis:

§ 0 Einführung

Die Menge $\mathbb{R}_+^m$ beschreibe den spitzen konvexen Kegel $([0,\infty))^m$.

0.1. $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$ beschreibe den Banach- Raum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{C}$, die samt ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung beschränkt sind, versehen mit der Norm $\|f\|^2 := \|f\|_\infty + \max\limits_{1\le i\le m} \left\|\frac{df}{dx_i}\right\|_\infty + \max\limits_{1\le i,j\le m} \left\|\frac{d^2f}{dx_i dx_j}\right\|_\infty$.
(Dabei bezeichne $\|\ \|_\infty$ die Supremumsnorm.)

A sei ein stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$.

A heißt <u>straff</u>, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$ gibt, so daß für alle $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$ mit $f\big|_{K_\varepsilon} = 0$ und $\|f\|_\infty \le 1$ folgt, daß $|\langle A,f\rangle| \le \varepsilon$ ist.

A heißt <u>fast positiv</u>, wenn A reell ist , und für alle $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$ mit $f(0) = 0$ und $f \ge 0$ folgt, daß $\langle A,f\rangle \ge 0$ ist.

A heißt <u>dissipativ</u>, wenn für alle $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$ mit $f(0) = \|f\|_\infty$ folgt, daß $\mathrm{Re}\langle A,f\rangle \le 0$ ist.

A heißt <u>fast positiv auf $\mathbb{R}_+^m$</u> bzw. <u>dissipativ auf $\mathbb{R}_+^m$</u>, falls A fast positiv bzw. dissipativ und Träger$(A) \subseteq \mathbb{R}_+^m$ ist *) .

Ist A fast positiv auf $\mathbb{R}_+^m$, so ist $A - \langle A,1\rangle\delta_0$ dissipativ auf $\mathbb{R}_+^m$, wobei δ_0 das Punktmaß in 0 sein soll.

Ein fast positives bzw. dissipatives, straffes Funktional A mit Träger in $\mathbb{R}_+^m$ ist laplacetransformierbar, d.h. es existiert die <u>Laplacetransformation</u> $z \longmapsto \mathcal{L}(A)(z) := \langle A, \exp_z\rangle$.
(Dabei sei $\exp_z(x) := e^{-\langle x,z\rangle}$ für alle $x,z \in \mathbb{R}_+^m$ definiert, wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das gewöhnliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$ beschreibt.)

---

*) Der Träger eines Funktionals auf $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$ ist das kleinste Kompaktum $K \in \mathbb{R}^m$, so daß für alle $g_K \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$ mit $g_K\big|_K = 1$ und $0 \le g_K\big|_{\mathbb{R}^m - K} \le 1$ und für alle $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$ gilt, daß $\langle A,f\rangle = \langle A, f\cdot g_K\rangle$ ist.

Für diese Laplacetransformierte gilt:

1. Ist A dissipativ und straff auf $\mathbb{R}_+^m$, so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^m$ und $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{j=1}^{n} c_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp_{x_j}$, daß $\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{L}(A)(x_j) \right) \leq 0$ ist. (Dabei bezeichne jetzt und im folgenden $\| f \|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}_+^m} | f |$ für alle Funktionen $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+^m)$.)

2. Ist A straff und fast positiv definit auf $\mathbb{R}_+^m$, so ist $\mathcal{L}(A)$ nach oben beschränkt und für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^m$ und $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ folgt, daß

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_i c_j \mathcal{L}(A)(x_i+x_j) \geq 0$$

ist .

Außerdem ist $\mathcal{L}(A)$ stets stetig für solche Funktionale. Auch die Umkehrung dieser beiden Implikationen trifft zu. Wir nennen diese Umkehrung einen Satz vom Bochner- Waldenfelsschen Typ. (Siehe dazu auch den Satz 7.3. dieser Arbeit.) Diese Arbeit studiert anhand der Kriterien 1. und 2. die Laplacetransformierten dissipativer bzw. fast positiver , straffer Funktionale auf $\mathbb{R}_+^m$. Insbesondere wird ein Darstellungssatz vom Lévy - Chintschinschen Typ bewiesen.(Siehe dazu Theorem 6.9. und 6.21.)

0.2. Infinitesimale Funktionale :

Eine Faltungshalbgruppe auf $\mathbb{R}^m$ ist eine Familie $(\mu_t)_{t \geq 0}$, $\mu_t \in M_b(\mathbb{R}^m)$, von beschränkten Borelmaßen auf $\mathbb{R}^m$ mit den Eigenschaften :

(i) $\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s$ für alle $s,t \geq 0$ und

(ii) $\mu_0 = \delta_0$, und μ_t konvergiert in der vagen Topologie gegen δ_0 für ein t gegen 0.

Gilt zusätzlich, daß $\|\mu_t\| \leq 1$ ist für alle $t \geq 0$, so heißt $(\mu_t)_{t \geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe vom H - Typ.

Ist $(\mu_t)_{t \geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe positiver Borelmaße auf $\mathbb{R}^m$, so definiert deren infinitesimales Funktional $f \longmapsto \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(\langle \mu_t, f \rangle - f(0))$ ein fast positives, straffes Funktional auf $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$.

Ist $(\mu_t)_{t \geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe vom H - Typ, so definiert deren infinitesimales Funktional $f \longmapsto \lim\limits_{t \; 0} \frac{1}{t}(\langle \mu_t, f \rangle - f(0))$ ein dissipatives, straffes Funktional auf $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$.

Umgekehrt gibt es zu jedem fast positiven bzw. dissipativen straffen Funktional auf $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$ die entsprechende Faltungshalbgruppe, deren infinitesimales Funktional mit diesem Funktional identisch ist.

Diese Überlegungen lassen sich natürlich auch auf die Dissipativität bzw. Fast-Positivität auf $\mathbb{R}_+^m$ übertragen.

0.3. Die Fouriertransformation fast positiver Funktionale auf R ist durch die klassische Formel von Lévy - Chintschin beschrieben. Einen Beweis dieser Darstellung mit Hilfe der Extrempunktmethode gibt S. Johannsen in [9] .
Eine Verallgemeinerung des Beweises auf beliebige lokalkompakte Gruppen entwickelte N. Drumm in seiner Arbeit [5] u.a. mit Hilfe der Choquet - Theorie.
Ein ähnliches Bild zeichnet die Entwicklung dieses Konzeptes für dissipative Funktionale.
So entwickelte J. Faraut für diese Funktionale auf R^m eine Lévy - Chintschin - Darstellung in seiner Arbeit [7] .
M. Duflo verallgemeinerte dieses Konzept für die Dissipativität auf lokalkompakten Gruppen; er lieferte in [6] mit dem Theorem 1 einen Satz vom Bochner - Waldenfelsschen Typ .
Nähere Betrachtungen der fast positiven Funktionale auf R_+^m anhand ihrer Laplacetransformierten wurden zuerst von Th. Drisch in [4] und [4a] angestellt. Im speziellen liefert das Kapitel 6 aus [4a] eine Lévy - Chintschin - Darstellung der Laplacetransformierten eines fast positiven Funktionals auf R_+ .
In diesem Zusammenhang sollte erwähnt werden, daß auch in der Arbeit [7] von J. Faraut auf die dissipativen Funktionale auf R_+ eingegangen wird. Darin wird im Paragraphen VII eine Lévy - Chintschin - Darstellung dieser Funktionale geliefert.
Die vorliegende Arbeit versucht nun, daran anzuknüpfen und ein entsprechendes Konzept für die Laplacetransformation auf R_+^m zu entwickeln.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Dr. Thomas Drisch bedanken für seine vorzügliche Betreuung und seine Geduld bei der Fertigstellung dieser Arbeit.

Mai 1983 H.G.

Ich danke auch Herrn Prof. Dr. Wilfried Hazod, der mich auf einige Schwächen dieser Arbeit in Argumentation und Stil aufmerksam gemacht hat, aufgrund derer ich mich veranlaßt sah, diese Arbeit unter Beibehaltung des Gesamtkonzepts daraufhin noch einmal zu überarbeiten.

Oktober 1983 H.G.

§ 1 Fast positiv definite Funktionen auf $\mathbb{R}_+^m$

1.1. Definition: (i) Eine Funktion $f: \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ heißt fast positiv definit $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^m\ \forall\ c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$:
$\sum_{i=1}^n c_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i+x_j)c_i c_j \geq 0$.

(ii) Eine Funktion $g: \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ heißt positiv definit, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^m$ die Matrix $(g(x_i+x_j))_{i,j=1,\dots,n}$ positiv definit ist.

1.2. Lemma: Sei $f: \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ eine fast positiv definite Funktion und $x,y \in \mathbb{R}_+^m$ beliebig, dann gilt:

(i) $f(2x)+f(2y) \geq 2f(x+y)$.

(ii) $f(x+y)-f(x) \geq f(x)-f(x-y)$, falls $x-y \in \mathbb{R}_+^m$.

(iii) $f(x) \leq 2^{-n}f(2^n x)+(1-2^{-n})f(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Ist f nach oben beschränkt, so gilt: $f(0) \geq f(x)$.

(v) $z \mapsto af(z+y)+c$ ist fast positiv definit für alle $a,c \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$.

(vi) Ist f nach oben beschränkt, so gilt: $f(x) \geq f(x+y)$.

(vii) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^m$ beliebig , dann ist die Matrix $(f(x_i+x_j)-f(x_i+y)-f(x_j+y)+f(2y))_{i,j=1,\dots,n}$ positiv definit.

Beweis: (i): Setze $x_1=x$, $x_2=y$ und $c_1=-c_2$ in 1.1.(i) ein.

(ii): Setze $x_1=\frac{x-y}{2}$ und $x_2=\frac{x+y}{2}$ mit $c_1=-c_2$ in 1.1.(i) ein.

(iii): Folgt für $y=0$ iterativ aus (i).

(iv): Folgt aus (iii) für $n \to \infty$.

(v): Trivial.

(vi): Folgt aus (iv) und (v) .

(vii): Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1,\dots,x_n,y \in \mathbb{R}_+^m$ und

$c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann folgt mit $c_0 := -\sum_{i=1}^{n} c_i$ und $x_0 := y$ nach Definition: $\sum_{i,j=0}^{n} f(x_i+x_j)c_ic_j =$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(f(x_i+x_j)-f(x_i+y)-f(x_j+y)+f(2y)\right)c_ic_j \geq 0 . \quad \square$$

1.3. __Lemma:__ Ist $g\colon \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ positiv definit, dann gilt:

(i) g ist fast positiv definit ,

(ii) $g(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^m_+$,

(iii) $(g(x+y))^2 \leq g(2x)g(2y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^m_+$,

(v) $x \longmapsto ag(x+y)+c$ ist positiv definit für alle $a \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^m_+$ und $c \geq 0$.

__Beweis:__ (i) und (v): Trivial.

(ii): Setze $x_1 := \frac{x}{2}$ mit $n=1$ in Definition 1.1.(ii) ein.

(iii): Löse für $n=2$ in Definition 1.1.(ii) das quadratische Gleichungssystem auf. $\square$

1.4. __Beispiele:__ (i) $x \longmapsto -\langle x,y\rangle$ ist fast positiv definit für alle $y \in \mathbb{R}^m$, und sogar nach oben beschränkt für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$.

(ii) Sind f und g fast positiv definit und $c \geq 0$, so sind $f+g$ und $c\cdot f$ fast positiv definit .

1.5. __Lemma:__ Ist $f\colon \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fast positiv definit und nach oben beschränkt, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}^m_+$:

$$|f(x)| \leq |f(\vec{1})-f(0)|\cdot(2\,x+1) + |f(0)|$$

(dabei sei $\vec{1} := (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^m_+$).

Beweis: Sei o.E. $f(0) = 0$ - sonst betrachte $f-f(0)$!
Wäre nun $f(\vec{1})=0$, dann wäre nach 1.2.(iii) $f(2^n \cdot \vec{1}) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun gibt es für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$ ein $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^m$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $x+\bar{x}= 2^n \cdot \vec{1}$. Aus 1.2.(vi) folgt : $f(x) \geq 0$.
Andererseits folgt wegen 1.2.(iv) und $f(0)=0$, daß $f(x) \leq 0$ ist.
Zusammenfassend gilt dann, daß $f(x)=0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$.
Sei also im folgenden $f \neq 0$.
Nehmen wir weiterhin an, daß $f(\vec{1})=-1$ ist, sonst betrachten wir $f/(-f(\vec{1}))$!

Sei $W:= \mathbb{R}_+^m \cap (\vec{1}- \mathbb{R}_+^m)$. Dann gilt für alle $x \in W$ wegen 1.2.(vi) : $f(x) \geq f(\vec{1})=-1$.
Da $\frac{x}{|x|} \in W$ ist für alle $x \in \mathbb{R}_+^m -\{0\}$, folgt für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$ mit $|x| \geq 1$ und $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x)=f\left(\frac{x}{|x|}\,|x|\right) &= f\left(\frac{x}{|x|}\,2^{\log_2 |x|}\right) \\ &\geq f\left(\frac{x}{|x|}\,2^{[\log_2 |x|]+1}\right) && \text{(wegen 1.2.(vi))} \\ &\geq f\left(\frac{x}{|x|}\right)2^{[\log_2 |x|]+1} && \text{(wegen 1.2.(iii))} \\ &\geq -2^{([\log_2 |x|]+1)} && \left(\text{wegen } 0 \geq f\left(\frac{x}{|x|}\right)\geq -1\right) \\ &\geq -2\; 2^{\log_2 |x|} = -2\,|x| \end{aligned}$$

(dabei bezeichne [ ] die Gauß-Klammern).
Weil $\{x \in \mathbb{R}_+^m \mid |x| \leq 1\} \subseteq W$ ist, folgt $0 \geq f(x) \geq -(2\,|x|+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$. Setzt man $c:=-f(\vec{1})$, so folgt die Behauptung. □

1.6. <u>Lemma:</u> Ist $f: \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ fast positiv definit und nach oben beschränkt, und sind $c_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in \mathbb{R}_+^m$ für $i=1,\ldots,n$ beliebig, so ist $x \longmapsto F(x) := \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i+x_j+x)c_ic_j$ nach oben beschränkt.

<u>Beweis:</u> Nach 1.2.(vii) gilt für beliebige $d_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}_+^m$ für $i=1,\ldots,n$ und $y \in \mathbb{R}_+^m$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} d_id_jf(x_i+x_j) + \sum_{i,j=1}^{n} d_id_jf(2y) \geq 2 \sum_{i,j=1}^{n} d_id_jf(x_i+y) .$$

Sind nun $c_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in \mathbb{R}_+^m$ für $i=1,\ldots,n$ beliebig, so seien $I\times I := \langle 1,\ldots,n\rangle \times \langle 1,\ldots,n\rangle$, $e_{(i,j)} := d_id_j$ und $y_{(i,j)} := x_i+x_j$ für alle $(i,j) \in I\times I$ definiert.

Für $\sum_{i=1}^{n} c_i \neq 0$ folgt nun mit $d := \sum_{i,j=1}^{n} c_ic_j = \sum_{(i,j)\in I\times I} e_{(i,j)} > 0$:

$$\sum_{(i,j)\in I\times I} \; \sum_{(k,l)\in I\times I} e_{(i,j)}e_{(k,l)}f(y_{(i,j)}+y_{(k,l)}) + d^2f(2y)$$

$$\geq 2d \sum_{(i,j)\in I\times I} e_{(i,j)}f(y_{(i,j)}+y) = 2d \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i+x_j+y)c_ic_j$$

$$= 2dF(y) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}_+^m .$$

(Fortsetzung auf der nächsten Seite!)

Nun ist der untere Teil der Ungleichung nach oben beschränkt, da die Doppelsumme existiert und $f(2y) \leq f(0)$ ist.

Für $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$ setze ich $e_{(0,0)} := 1$ und $y_{(0,0)} := 0$, und es gilt: $\sum_{(i,j) \in I \times I \cup \{(0,0)\}} e_{(i,j)} = 1$.

Analog zum vorherigen folgt damit :

$$\sum_{(i,j) \in I\times I \cup \{(0,0)\}} \sum_{(k,l) \in I\times I \cup \{(0,0)\}} e_{(i,j)} e_{(k,l)} f(y_{(i,j)} + y_{(k,l)})$$

$$+f(2y) \geq$$

$$\geq 2 \sum_{(i,j) \in I\times I \cup \{(0,0)\}} e_{(i,j)} f(y_{(i,j)} + y) = 2 \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j f(x_i + x_j + y)$$

$$= 2F(y).$$

Nun ist auch hier der untere Teil durch die Doppelsumme und $f(0)$ nach oben beschränkt.

Aus beiden Fällen folgt die Behauptung. $\square$

1.7. <u>Lemma:</u> Ist $f: \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ fast positiv definit und nach oben beschränkt, so gilt für alle $a \in \mathbb{R}_+^m$:

$x \mapsto \Delta_a f(x) := f(x) - f(x+a)$ ist positiv definit und nach oben beschränkt.

<u>Beweis:</u> Seien $c_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in \mathbb{R}_+^m$ beliebig, aber fest für $i=1,\dots,n$. $F(x) := \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i+x_j+x) c_i c_j$ ist nach oben beschränkt. Außerdem ist F fast positiv definit, denn wenn $d_k \in \mathbb{R}$ und $y_k \in \mathbb{R}_+^m$ für $k=1,\dots,r$ sind mit $\sum_{i=1}^{r} d_i = 0$, so folgt mit $e_{(k,i)} := d_k c_i$ und $z_{(k,i)} := y_k + x_i$ $(k=1,\dots,r; i=1,\dots,n)$, daß $\sum_{(k,i)=(1,1)}^{(r,n)} e_{(k,i)} = 0$ ist. Damit folgt :

$$0 \leq \sum_{(k,i),(l,j)=(1,1)}^{(r,n)} e_{(k,i)} e_{(l,j)} f(z_{(k,i)} + z_{(l,j)})$$

$$= \sum_{k,l=1}^{r} F(y_k + y_l) d_k d_l .$$

Daraus folgt die fast positive Definitheit von F.

Wegen 1.2.(iv) folgt damit: $F(a) \leq F(0)$ für alle $a \in \mathbb{R}_+^m$.

Daher gilt: $F(0)-F(a) = \sum_{i,j=1}^{n} (f(x_i+x_j)-f(x_i+x_j+a))c_i c_j \geq 0$

Weil die c_i und x_i mit $i=1,\dots,n$ beliebig gewählt wurden, folgt, daß $x \mapsto \Delta_a f(x) = f(x)-f(x+a)$ positiv definit sind.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\Delta_a f$ beschränkt ist.

Nun gilt nach 1.3.(iii) für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$:

$(\Delta_a f(x))^2 \leq \Delta_a f(2x) \Delta_a f(0)$ und induktiv

$$\begin{aligned}|\Delta_a f(x)| &\leq (\Delta_a f(0))^{(1-2^{-n-1})} (\Delta_a f(2^n x))^{2^{-n}} \\ &\leq (\Delta_a f(0))^{(1-2^{-n-1})} (f(0)-f(2^n x+a))^{2^{-n}} \text{(wegen 1.2.(iv))} \\ &\leq (\Delta_a f(0))^{(1-2^{-n-1})} (c\,|2^n \cdot x + a|\,)^{2^{-n}}\end{aligned}$$

(Die letzte Ungleichung folgt aus 1.5.) .

Nun geht der letzte Ausdruck für $n \to \infty$ immer gegen $\Delta_a f(0)$, welches damit $\Delta_a f$ beschränkt. □

1.7'. <u>Bemerkung:</u> Ist $f: \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ fast positiv definit und nach oben beschränkt, dann gilt : $f-f(0)$ ist subadditiv.

<u>Beweis:</u> Folgt unmittelbar aus 1.7. □

1.7''. <u>Bemerkung:</u> Es läßt sich mit 1.7'. leicht zeigen, daß fast positiv definite Funktionen, die nach oben beschränkt und stetig im Nullpunkt sind, auf ganz $\mathbb{R}_+^m$ stetig sind.

1.8. <u>Bezeichnung:</u> (i) $F := \{f: \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R} \mid f$ ist stetig, nach oben beschränkt und fast positiv definit$\}$.

(ii) $F_0 := \{f \in F \mid f(0) \leq 0\}$

(iii) $K := \{ f \in F_0 \mid f(\hat{1}) = -1\}$,wobei $\hat{1} := (1,\dots,1) \in \mathbb{R}_+^m$ ist.

1.9. Bemerkung: (i) $f \in F \Rightarrow \exists a \in R,\ b \geq 0,\ \bar{f} \in K : f = a + b\bar{f}$.
(Denn wie im Beweis von 1.5. folgt wegen 1.2.(iv) und 1.2.(vi), daß mit $f(\vec{1})=f(0)$ auch $f = f(0)$ ist. Sei nun o.w.E. $f(0) \neq f(\vec{1})$, so setzt man $a := f(0)$, $b := f(0)-f(\vec{1})$ und $\bar{f} := \frac{1}{b}(f-f(0))$.)
(ii) F_0 ist ein spitzer, konvexer Kegel mit Basis K .

1.10. Satz: Die Extrempunkte von K liegen unter folgenden Funktionen:
(1) $g(x) = -1$,
(2) $g_0^i(x) = -\langle e_i, x\rangle$ (e_i sei der i-te Einheitsvektor von R^m),
(3) $g_y(x) = (1-e^{-\langle\vec{1},y\rangle})^{-1}(e^{-\langle y,x\rangle}-1)$ für $y \in R_+^m - \{0\}$.

Beweis: Sei $f \in K$. Wegen $f(0) \geq f(\vec{1})$ gilt : $-1 \leq f(0) \leq 0$.
Ich setze $\mu := -f(0)$,dann ist $f = (1-\mu)\frac{f-f(0)}{f(0)-f(\vec{1})} - \mu$.
Ist f extrem, so gilt: $\mu = 1$ oder $\mu = 0$.
Im ersten Fall gilt $f(0)=-1$ und damit wegen 1.2.(iii) und 1.2.(vi), daß $f = -1$ ist.
Zweiter Fall: $f(0)=0$:
Für $a \in R_+^m$ sei $\Delta_a^-(x) := f(x)-f(x+a)+f(a)$ und $\Delta_a^+(x) := f(x+a)-f(a)$ definiert. Wegen 1.7 und 1.4.(ii) gilt $\Delta_a^{\pm} \in F_0$ und es ist $f = \frac{1}{2}(\Delta_a^+ + \Delta_a^-)$ für alle $a \in R_+^m$.
Ist f extrem, so existiert ein $\mu_a \in R$ mit $\mu_a f = \Delta_a^+$.
Dies bedeutet: $\mu_a f(x) = f(x+a) - f(a)$ für alle $x, a \in R_+^m$.
Also ist $-\mu_a = f(\vec{1}+a)-f(a)$ (da $f(\vec{1})=-1$ ist).
Daraus folgt: $f(x)(f(a)-f(a+\vec{1}))=f(x+a)-f(a)$.
Setzt man nun für x $b \in R_+^m$ beziehungsweise $b+\vec{1}$ ein, so gilt für alle $a, b \in R_+^m$:
$(f(b)-f(b+\vec{1}))(f(a)-f(a+\vec{1})) = f(a+b)-f(a+b+\vec{1})$.
Daher gilt für $\Delta_{\vec{1}}f(x) := f(x)-f(x+\vec{1})$:
$\Delta_{\vec{1}}f(x+y) = \Delta_{\vec{1}}f(x)\Delta_{\vec{1}}f(y)$ für alle $x, y \in R_+^m$.
Da $\Delta_{\vec{1}}f$ beschränkt ist und $\Delta_{\vec{1}}f(0)=1$ ist, muß $\Delta_{\vec{1}}f$ eine

Exponentialfunktion der Form $\Delta_{\vec{1}} f(x)=e^{-\langle y,x\rangle}$ sein mit $y \in R_+^m$.
Ist $y = 0$, so folgt: $\Delta_{\vec{1}} f = 1$ und damit $\mu_a=1$. Das heißt: $f(x)=f(x+a)-f(a)$ und daraus folgt, daß f linear ist.
Weil $f(\vec{1})=-1$ und $f(0)=0$ ist, gilt: $f(x)=-\langle x,y\rangle$, wobei $y \in R_+^m$ mit $\langle\vec{1},y\rangle=1$ ist. Da nun f extrem ist, muß $y=e_i$ sein für ein $i\in\{1,\dots,m\}$.
Ist $y \neq 0$, so gilt: $\mu_a = e^{-\langle y,a\rangle}$ und somit
$f(x)e^{-\langle y,a\rangle} = f(x+a)-f(a)$ für alle $x,a \in R_+^m$.
Für $a=\vec{1}$ heißt das: $f(x)e^{-\langle\vec{1},y\rangle} = f(x+\vec{1})-f(\vec{1}) = f(x+\vec{1})+1$.
Zusammen gilt daher für alle $x \in R_+^m$:
$f(x)(e^{-\langle\vec{1},y\rangle}-1) = f(x+\vec{1})-e^{-\langle y,x\rangle}-f(x+\vec{1})+1$, woraus folgt:
$f(x)=\dfrac{1-e^{-\langle y,x\rangle}}{e^{-\langle y,\vec{1}\rangle}-1} = g_y(x)$. □

1.11. <u>Satz:</u> Die Extrempunkte von K sind genau die in 1.10. aufgelisteten: (1) $g(x)=-1$,

(2) $g_0^i(x)=-\langle x,e_i\rangle$ für $i=1,\dots,n$

und (3) $g_y(x)=(1-e^{-\langle y,\vec{1}\rangle})^{-1}(e^{-\langle y,x\rangle}-1)$ mit $y\in R_+^m-\{0\}$.

<u>Beweis:</u> (1): Annahme: $\exists\, h_1,h_2\in K\ \exists\, \beta\in(0,1): (1-\beta)h_1+\beta h_2 = -1$ ($\Rightarrow -1-\beta h_2=(1-\beta)h_1$) gelte. Da nun h_2 1.2.(vi) genügen muß, muß auch $-h_1$ dem genügen. Das heißt h_1 muß konstant sein und damit auch h_2, woraus $h_1=h_2=-1$ folgt.
(2): Annahme: $\exists\, h_1,h_2\in K\ \exists\, \beta\in(0,1): (1-\beta)h_1+\beta h_2= g_0^i$.
Es folgt: $h_1(0)=h_2(0)=0$. Es gilt weiterhin für alle $x,y \in R_+^m$:
$\beta h_1(x+y)+(1-\beta)h_2(x+y) = \beta(h_1(x)+h_1(y)) + (1-\beta)(h_2(x)+h_2(y))$.
Mit 1.7'. folgt: $h_i(x+y) = h_i(x) + h_i(y)$ für $i=1,2$.
Es gilt daher, daß h_1 und h_2 linear sind, und da sie aus K sind, haben sie die Form $h_1(x)=-\langle x,y_1\rangle$ und $h_2(x)=-\langle x,y_2\rangle$.
Da e_i extrem in $\{x \in R_+^m \mid \langle x,\vec{1}\rangle=1\}$ liegt, folgt $y_1=y_2=e_i$.

(3): Annahme, es gelte: $\exists\, h_1,h_2 \in K\ \exists\, \beta \in (0,1):\ \beta h_1+(1-\beta)h_2 = g_a$.
Zuerst einmal gilt, daß $h_1(0)=h_2(0)=0=g_a(0)$ ist.
Außerdem gilt für alle $y \in \mathring{R}^m_+ := ((0,\infty))^m$, daß $g_a(y) < 0$ ist.
Nimmt man nun an, daß $h_i(y) = 0$ wäre für ein $y \in \mathring{R}^m_+$, so wäre nach 1.2.(iii) auch $h_i(2^n y)=0$ für $n \in N$, und somit würde ein $x \in R^m_+$ existieren mit $\vec{1}+x = 2^n y$ für genügend großes $n \in N$, was wegen 1.2.(vi) zu $h_i(\vec{1})=-1$ im Widerspruch stehen würde.
Somit folgt auch für $i=1,2$: $h_i(y) < 0$ für alle $y \in \mathring{R}^m_+$.
Definiert man nun $\bar{\beta} := \beta h_1(y)(g_a(y))^{-1} \in (0,1)$ für $y \in \mathring{R}^m_+$
(weil $\beta h_1(y)(g_a(y))^{-1} + (1-\beta)h_2(y)(g_a(y))^{-1} = 1$ ist) und
$D_y h_i(x) := (h_i(y)-h_i(0))^{-1}(h_i(x+y)-h_i(x))$ für alle $x \in R^m_+$,
$i=1,2$, so gilt:

(*) $$\bar{\beta} D_y h_1 + (1-\bar{\beta}) D_y h_2 = \exp_a ,$$

dabei ist $\exp_a(x) := e^{-\langle x,a\rangle}$ für alle $x \in R^m_+$ definiert.
Dieses $D_y h_i$ ist aber positiv definit und beschränkt wegen 1.7.
Außerdem ist $D_y h_i(0)=1$ und $D_y h_i \geq 0$ für $i=1,2$.
Aus der konvex-linear-Darstellung (*) von $\exp_a$ folgt für $i=1,2$:
Ist für $c_1,\dots,c_n \in R$ $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$, so gilt für alle $x_1,\dots,x_n \in R^m_+$:
$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_l e^{\langle x_k,a\rangle} e^{\langle x_j,a\rangle} D_y h_i(x_k+x_j) = 0$. Daraus folgt, daß
$-\exp_{-a} D_y h_i$ fast positiv definit und nach oben beschränkt ist.
Es gilt: $-\bar{\beta} D_y h_1 \exp_{-a} - (1-\bar{\beta}) D_y h_2 \exp_{-a} = -1$.
Analog zu (1) folgt damit, daß $D_y h_1 = D_y h_2 = \exp_a$ ist.
Damit gilt: $\forall x \in R^m_+\ \forall y \in \mathring{R}^m_+ :\ h_i(x)-h_i(x+y) = h_i(y)e^{-\langle x,a\rangle}$ $(i=1,2)$.
Es folgt für $y=\vec{1}$: $h_i(x+\vec{1}) = e^{-\langle x,a\rangle}+h_i(x)$,
und für $x=\vec{1}$: $h_i(y+\vec{1}) = e^{-\langle \vec{1},a\rangle} h_i(y) - 1$ $(i=1,2)$.
Zusammen liefert das für $x=y$: $h_i(x) = g_a(x)$ für alle $x \in \mathring{R}^m_+$.
Wegen der Stetigkeit von h_1 und h_2 folgt natürlich $h_1=h_2=g_a$.

□

Bemerkungen zum Paragraphen 1 :

Dieser Paragraph soll zuerst einmal die Eigenschaften von Funktionen aus F soweit klären, daß die Sätze 1.10. und 1.11. bewiesen werden können. Diese Sätze finden schließlich im Beweis des Satzes 6.20. Anwendung, der uns die Levy - Chintschin - Darstellung der Funktionen aus F liefert.

In der Definition 1.1. werden die Begriffe "fast positiv definit" und "positiv definit" aus dem Text [4a] von Th. Drisch übernommen. Im Artikel [2] von C. Berg, J.P.R. Cristensen und P. Ressel werden die Funktionen $f \in -F_0$ auch als "negative definite" bezeichnet. Aus diesem Artikel sind auch die Bemerkungen 1.2. und 1.3. übertragen worden.

Beim Beweis des Lemmas 1.5. steht die Beweisführung des Hilfssatzes 5 aus dem Text [11] von W. v. Waldenfels Pate.

Unsere Wahl der Basis K des spitzen Kegels F_0 wurde in Hinsicht auf die Erarbeitung der Extrempunkte getroffen. Man hätte ebenso ein lineares, stetiges und reelles Funktional A auf dem Raum der stetigen Funktionen auf R_+^m wählen können, welches auf F_0 beschränkt ist , dessen Laplacetransformierte positiv ist und dessen differenzierte Laplacetransformierte in O nicht verschwindet, um durch $K_A := \{f \in F_0 \mid \langle A,f\rangle = -1\}$ eine andere Basis von F_0 zu bekommen.

Die einfache Form der Beweise von Satz 1.10. und 1.11. zeigt uns, daß diese Wahl der Basis recht vorteilhaft ist.

Es sollte nicht unerwähnt bleiben, daß die Einschränkung " nach oben beschränkt " für unsere Betrachtung der fast positiv definiten Funktionen eine wesentliche Rolle spielt.

Betrachtet man für ein $a \in R_+^m - \{0\}$ die Funktion $E_a : x \mapsto e^{\langle x,a\rangle}$, so ist diese fast positiv definit, aber nicht nach oben be-

schränkt . Es zeigt sich leicht, daß die Aussagen von 1.5. 1.7''. nicht mehr darauf zutreffen.
Zum Schluß sollte noch bemerkt werden, daß dieses ganze Konzept des Paragraphen 1 sich unter entsprechenden Zusatzüberlegungen auf spitze Kegel lokalkonvexer Räume ausdehnen ließe.

§ 2 Dissipative Funktionen auf $\mathbb{R}_+^m$

Sei im folgenden für $y \in \mathbb{R}_+^m$ $\exp_y : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto e^{-\langle x,y\rangle}$ definiert für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$.

2.1. Definition: (i) Eine Funktion $v: \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt exponentiell, falls $v = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp_{x_i}$ ist, mit $c_i \in \mathbb{C}$ und $x_i \in \mathbb{R}_+^m$ für alle $i=1,\dots,n$.

(ii) Θ bezeichne den Vektorraum der exponentiellen Funktionen.

(iii) $T := \{ t \in \Theta \mid t(0) = \|t\|_\infty \}$.

2.2. Definition: (i) Eine Funktion $g: \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt vollständig dissipativ, falls es ein $c \geq 0$ gibt, so daß für alle $v \in \Theta$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp_{x_i}$ gilt, daß $\left| \sum_{i=1}^{n} c_i g(x_i) \right| \leq c \|v\|_\infty$ ist.

(ii) Eine Funktion $f: \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt dissipativ, falls für alle $t \in T$ mit $t = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp_{x_i}$ folgt, daß $\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \leq 0$ ist.

2.3. Bezeichnung: (i) Eine zur vollständig dissipativen Funktion g nach 2.2.(i) (nicht eindeutig) bestimmte Konstante c heiße majorisierende Konstante von g.

(ii) $U := \{ g: \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{C} \mid g \text{ ist vollständig dissipativ und stetig} \}$.

(iii) $Q := \{ f: \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist dissipativ und stetig} \}$.

2.3'. Bemerkung: U ist ein komplexer Untervektorraum von $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+^m)$, und Q ist ein konvexer Kegel in $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^m)$. (Dabei bezeichne $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^m)$ die stetigen und $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+^m)$ die stetigen beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}_+^m$.)

2.4. Definition: Sei $\beta \in M_b(\mathbb{R}_+^m)$ (letzteres sie die Menge der beschränkten Borelmaße auf $\mathbb{R}_+^m$). Dann heißt $\mathcal{L}(\beta) := \int_{\mathbb{R}_+^m} \exp_y \, \beta(dy)$

die Laplacetransformierte von β.

2.5. Bemerkung: Es ist $\mathcal{L}(\beta) \in U$ für alle $\beta \in M_b(\mathbb{R}_+^m)$.

Beweis: Es gilt $\mathcal{L}(\beta) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+^m)$ trivialerweise. Da $\beta \in (\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+^m))'$ (dabei bezeichne X' das Dual von X) ist mit Operatornorm

$\|\beta\| =: c$, so folgt für alle $v \in \Theta$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp_{x_i}$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i \int_{R_+^m} e^{-\langle x_i, y\rangle} \beta(dy)\right| = \left|\int_{R_+^m} v(y)\beta(dy)\right| \leq c\, \|v\|_\infty \text{ . } \square$$

2.6. __Bemerkung:__ Seien $t_1, t_2, t \in T$ beliebig, sei $t = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp_{x_i}$.

Dann gilt:

(i) $t_1 t_2 \in T$, $t_1 + t_2 \in T$, $at \in T$ für alle $a \geq 0$.

(ii) $\bar{t} \in T$, $\operatorname{Re} t \in T$.

(iii) Ist $t \neq 0$, so folgt: $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re} c_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} c_i = 0$.

(iv) $\exp_y \in T$ für alle $y \in R_+^m$.

__Beweis:__ (i): $|t_1 t_2(x)| \leq \|t_1\|_\infty \|t_2\|_\infty = t_1(0) t_2(0)$. Alles andere ist trivial.

(ii): Folgt aus: $|t(x)| = |\overline{t(x)}| \leq t(0)$ und $\operatorname{Re} t = \frac{1}{2}(t + \bar{t})$.

(iii): $t(0) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re} c_i > 0$ liefert die Behauptung.

(iv) : Ist trivial. $\square$

2.7. __Bemerkung:__ Sind $f, h: R_+^m \longrightarrow C$ dissipativ und ist $t \in T$ mit $t = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp_{x_i}$, dann gilt:

(i) $f+h$ und af sind dissipativ für alle $a \geq 0$.

(ii) Für alle $c \in R$ ist ic dissipativ.

(iii) $\bar{f}$ und $\operatorname{Re} f$ sind dissipativ und es gilt: $\operatorname{Re} f \leq 0$.

(iv) f_y ist dissipativ für alle $y \in R_+^m$, wobei $f_y(x) := f(x+y)$ definiert ist.

(v) $\sum_{i=1}^{n} c_i f_{x_i}$ ist dissipativ.

__Beweis:__ (i):Folgt trivial nach 2.6.(i).

(ii): Ist $s \in T$ mit $s = \sum_{j=1}^{k} d_j \exp_{y_j}$,so ist $\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Im} d_j c = 0$.

(iii): Folgt aus 2.6.(ii) und 2.6.(iv) .

(iv): Ist $s \in T$ mit $s = \sum_{j=1}^{k} c_j \exp_{y_j}$, so ist $\exp_y s = \sum_{j=1}^{k} c_j \exp_{(y_j + y)}$, woraus die Behauptung mit 2.6.(i) folgt.

(v): Folgt analog (iv) nach 2.6.(i) . $\square$

2.8. Bemerkung: Ist $v \in \Theta$, $\beta \in \Pi := (-\pi, \pi]$ und $y \in R_+^m$, so gilt:

$t := (1-\exp_y)e^{i\beta}v + \exp_y \|v\|_\infty \in T$.

Beweis: Es ist klar, daß $t \in \Theta$ und $t(0) = \|t\|_\infty$ ist. Die Ungleichung $|t(x)| \leq (1-e^{-\langle x,y\rangle})\, |e^{i\beta}v(x)| + e^{-\langle x,y\rangle}\|v\|_\infty \leq \|v\|_\infty = t(0)$ zeigt, daß $t \in T$ ist. $\square$

2.9. Lemma: Sei $g: R_+^m \longrightarrow \mathbb{C}$ vollständig dissipativ und $f: R_+^m \longrightarrow \mathbb{C}$ dissipativ und sei c die majorisierende Konstante von g.

Dann gilt:

(i) $ge^{i\beta} - c$ ist dissipativ für alle $\beta \in \Pi$.

(ii) $f - f_y$ ist vollständig dissipativ für alle $y \in R_+^m$.

Beweis: (i): Sei $t \in T$ mit $t = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp_{x_j}$ und $t(0) = \|t\|_\infty$ so folgt:

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} c_j (g(x_j)e^{i\beta} - c) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j g(x_j) e^{i\beta}\Big) - c\|t\|_\infty \leq 0 \;.$$

(ii): Sei $v \in \Theta$ mit $v = \sum_{j=1}^{k} c_j \exp_{y_j}$, so sei dazu t wie in 2.8. definiert und dabei sei $\beta := -\arg\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j (f(y_j) - f(y_j + y))\Big)$. Da $t \in T$ ist, folgt aus der Dissipativität von f die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\; e^{i\beta}\Big(\sum_{j=1}^{n} (f(y_j) - f(y_j+y))c_j\Big) = \Big|\sum_{j=1}^{n} (f(y_j) - f(y_j-y))c_j\Big|$$

$\leq -\mathrm{Re}\, f(y)\|v\|_\infty$, woraus die vollständige Dissipativität von $f - f_y$ geschlossen werden kann . $\square$

2.10. Bemerkung: Ist $t \in T$, so gilt für alle $y \in R_+^m$ und $\beta \in \Pi$:

(i) $\exp_y t + (1-\exp_y)e^{i\beta}t =: t_1 \in T$.

(ii) $\exp_y t + (1-\exp_y)e^{i\beta}t(0) =: t_2 \in T$.

(iii) $\exp_y t(0) + (1-\exp_y)e^{i\beta}t =: t_3 \in T$.

Beweis: Es ist klar, daß $t_j \in \Theta$ und $t_j(0) = t(0)$ ist für $j = 1,2,3$.

$|t_j(x)| \leq e^{-\langle x,y\rangle}\|t\|_\infty + (1-e^{-\langle x,y\rangle})\|e^{i\beta}t\|_\infty = \|t\|_\infty = t_j(0)$ $(j=1,2,3)$

zeigt, daß $t_j \in T$ für $j=1,2,3$. $\square$

Damit ist das folgende Lemma genauso wie Lemma 2.9.(ii) durch 2.8. bewiesen :

2.11. <u>Lemma:</u> Sei $f\colon R^m_+ \longrightarrow C$ dissipativ und seien $\beta \in \Pi$ und $y \in R^m_+$. Dann gilt:

(i) $f_y + e^{i\beta}(f-f_y)$ ist dissipativ.

(ii) $f_y + e^{i\beta}(f(0)-f(y))$ ist dissipativ.

(iii) $f(y) + e^{i\beta}(f-f_y)$ ist dissipativ.

2.12. <u>Lemma:</u> Es gilt: $f \in Q \cap -Q \iff f = ic$ für ein $c \in R$.

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$": Aus $f \in Q \cap -Q$ folgt wegen 2.7.(iii): $\mathrm{Re}f = 0$. Setzt man $t^{\pm} := \exp_y \pm i(\exp_y - 1) \in T$ für $y \in R^m_+$ so folgt: $\mathrm{Re}(f(y) \pm i(f(y)-f(0)) = \pm(\mathrm{Im}f(0)-\mathrm{Im}f(y)) \leq 0$, und damit ist $\mathrm{Im}f(0)=\mathrm{Im}f(y)=:c$. Da y beliebig gewählt war, folgt die Implikation.

"$\Leftarrow$": Folgt aus 2.7.(ii). □

2.13. <u>Bemerkung:</u> Ist $f\colon R^m_+ \longrightarrow C$ dissipativ, dann gilt für alle $x, y \in R^m_+$:

(i) $\mathrm{Re}f(x+y) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Re}f(x)$.

(ii) $\mathrm{Re}f$ ist subadditiv.

<u>Beweis:</u> (i): Folgt daraus, daß $t := \exp_x(\exp_y - \frac{1}{2}) \in T$ ist.

(ii): Folgt aus 2.11.(iii) mit $\beta = 0$. □

2.14. <u>Bemerkung:</u> Ist $f\colon R^m_+ \longrightarrow C$ dissipativ, so gilt:

(i) Ist $\mathrm{Re}f$ beschränkt, dann ist auch $\mathrm{Im}f$ beschränkt.

(ii) Ist $\mathrm{Re}f(0)=0$, dann ist $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f(0)$.

<u>Beweis:</u> (i): Setzt man $t^{\pm}_y := \exp_y \pm i(\exp_y - 1)$, so ist $t^{\pm}_y \in T$, und das liefert $\mathrm{Re}f(y) \pm \mathrm{Im}f(y) \mp \mathrm{Im}f(0) \leq 0$, woraus folgt: $|\mathrm{Im}f(y)| \leq -\mathrm{Re}f(y) + |\mathrm{Im}f(0)|$.

(ii): Aus 2.11.(ii) folgt: $|f(0)-f(y)| \leq -\mathrm{Re}f(y)$. Ist $f(0)=0$, dann gilt: $|f(y)| \leq -\mathrm{Re}f(y) = |\mathrm{Re}f(y)|$, woraus $\mathrm{Im}f(y)=0$ folgt. Da $y \in R^m_+$ beliebig gewählt werden kann, folgt: $\mathrm{Im}f = 0$. Da mit f auch $f - i\mathrm{Im}f(0)$ dissipativ ist, folgt die Behauptung.

□

2.15. <u>Lemma:</u> Ist $f \in Q$ und $y \in \mathbb{R}^m_+$ beliebig, dann gibt es $r_y, s_y \geq 0$ mit $r_y + s_y \leq 1$, so daß für alle $\beta \in \Pi$ $(:=(-\pi,\pi])$ gilt:

$\Delta_y^{\beta} f := e^{i\beta}(f - f_y) + r_y f(y) \in Q$ und

$\Delta_y f := f_y - (1-s_y) f(y) \in Q$.

<u>Beweis:</u> Sei $y \in \mathbb{R}^m_+$ beliebig, aber fest. Seien weiterhin

$r := \inf \{ a \geq 0 \mid \forall \beta \in \Pi : e^{i\beta}(f - f_y) + a f(y) \in Q \}$ und

$s := \inf \{ a \geq 0 \mid f_y - (1-a) f(y) \in Q \}$ gesetzt.

Wegen 2.11. und 2.7.(iv) ist natürlich $r, s \leq 1$.

Nehmen wir an, es gelte $r+s > 1$. Dann gibt es $\hat{r} < r$ und $\hat{s} < s$ mit $\hat{r} + \hat{s} > 1$, und es gibt dazu ein $\beta \in \Pi$ und

$t_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp_{x_j} \in T$ und $t_2 = \sum_{k=1}^{l} d_k \exp_{y_k} \in T$ mit

$t_1(0) = t_2(0) = \|t_1\|_\infty = \|t_2\|_\infty = 1$, für die gilt:

$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} c_j (e^{i\beta}(f - f_y)(x_j) + \hat{r} f(y)) =: a_1 > 0$ und

$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{l} d_k (f_y(y_k) - (1-\hat{s}) f(y)) =: a_2 > 0$.

Setzt man nun

$t := (1 - \exp_y) e^{i\beta} t_1 + \exp_y (t_2 + \hat{r} t_1(0) - (1-\hat{s}) t_2(0))$, so ist

$t(0) = t_2(0) + \hat{r} t_1(0) - (1-\hat{s}) t_2(0) = (\hat{r} + \hat{s}) > 1$.

Weiterhin gilt folgende Abschätzung für alle $x \in \mathbb{R}^m_+$:

$$
\begin{aligned}
|t(x)| &= |t_1(x) e^{i\beta}(1 - e^{-\langle x,y\rangle}) + e^{-\langle x,y\rangle}(t_2(x) + \hat{r} - 1 + \hat{s})| \\
&\leq |t_1(x)| (1 - e^{-\langle x,y\rangle}) + e^{-\langle x,y\rangle}(|t_2(x)| + (\hat{r} + \hat{s} - 1)) \\
&\leq \|t_1\|_\infty (1 - e^{-\langle x,y\rangle}) + e^{-\langle x,y\rangle}(\|t_2\|_\infty + (\hat{r} + \hat{s} - 1)) \\
&\leq \hat{r} + \hat{s} = t(0).
\end{aligned}
$$

Damit ist $t \in T$, was wegen $a_1 + a_2 > 0$ im Widerspruch zur Dissipativität von f steht.

Also ist $r+s \leq 1$. □

2.16. Lemma: Ist $f \in Q$ und $y \in \mathbb{R}_+^m$ beliebig, dann gibt es ein $a_y \in [0,1]$, so daß für alle $\beta \in \Pi$ gilt:
$e^{i\beta}(f-f_y)+a_y f(y) \in Q$ und $f_y - a_y f(y) \in Q$.

Beweis: Setzt man $a_y := r_y$ von 2.15, so folgt natürlich mit $r_y + s_y \leq 1$, daß $f_y - a_y f(y) = \Delta_y f + (1-s_y-r_y) f(y) \in Q$ ist. $\square$

Bemerkung: Dieses Lemma spielt im §4 eine zentrale Rolle.

2.17. Beispiele: (i) Ist $d \geq 0$, so ist $-d \in Q$.
(ii) Sei $l_y(x) := -\langle x,y\rangle$, so ist $l_y \in Q$ für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$.
(iii) $x \mapsto (e^{i\beta}e^{-\langle x,y\rangle}-1)$ ist dissipativ für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ und $\beta \in \Pi$.

Beweis: (i): Trivial.
(ii): Es genügt nach 2.7.(i) zu zeigen, daß $l_{e_j} \in Q$ ist, wobei e_j der j-te Einheitsvektor von $\mathbb{R}^m$ sein soll.
Nun gilt: $\frac{d}{dx_j}\mathrm{Re}t(0) = -\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_j, x_k\rangle \leq 0$ für alle $t \in T$ mit $t = \sum_{k=1}^{n} c_k \exp_{x_k}$. Daraus folgt, daß l_{e_j} dissipativ ist.
(iii): Folgt unmittelbar aus 2.9.(i) . $\square$

2.18. Lemma: Ist $f \in Q$ mit $\mathrm{Re}f(x)=0$ für ein $x \in \mathrm{Inn}\mathbb{R}_+^m := ((0,\infty))^m$, so folgt: $f \in Q \cap -Q$.

Beweis: Sei $x \in \mathrm{Inn}\mathbb{R}_+^m$ mit $\mathrm{Re}f(x)=0$, so liefert 2.13.(i) für alle $y \in \mathbb{R}_+^m \cap (x-\mathbb{R}_+^m)$, daß $\mathrm{Re}f(y) \geq 2\mathrm{Re}f(x)=0$ und somit $\mathrm{Re}f(y)=0$ ist. Aus 2.13.(ii) ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}_+^m$, daß $n\mathrm{Re}f(x) \leq \mathrm{Re}f(nx)$ ist. Da nun $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n(\mathbb{R}_+^m \cap (x-\mathbb{R}_+^m)) = \mathbb{R}_+^m$ ist, gilt : $\mathrm{Re}f = 0$. Nach 2.14.(ii) folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung: Das nachfolgende Lemma dient zur genauen Bestimmung der Extrempunkte des spitzen Kegels $Q/(Q \cap -Q)$, die in § 4 vorgenommen werden wird.

2.19. <u>Lemma:</u> Ist $y \in \mathbb{R}^m_+ - \{0\}$, $\beta \in \Pi := (-\pi,\pi]$ beliebig, so gibt es $t^{y,\beta} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m_+)$ mit $t^{y,\beta}(0) = \|t^{y,\beta}\|_\infty = e^{-i\beta} t^{y,\beta}(y)$ und eine Folge $(t_n^{y,\beta})_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, die gleichmäßig gegen $t^{y,\beta}$ konvergiert.

<u>Beweis:</u> 1. Ist $\beta = 0$, so liefert $t^{y,0} := t_n^{y,0} := 1$ die gesuchten Funktionen.

2. Ist $\beta = \pi$, so sei $t^{y,\pi} := t_n^{y,\pi} := 2(2\exp_z - 1)^2 - 1$ gesetzt, wobei $z \in \mathbb{R}^m_+$ so gewählt sei, daß $\exp_z(y) = e^{-\langle y,z\rangle} = \frac{1}{2}$ ist.
Da $0 \leq (2\exp_z - 1)^2 \leq 1$ ist und $t^{y,\pi}(0) = t_n^{y,\pi}(0) = 1$, folgt: $t^{y,\pi}, t_n^{y,\pi} \in T$. Weil $t^{y,\pi}(y) = t_n^{y,\pi}(y) = -1$ ist liefern diese Funktionen die gesuchten.

3. Sei $0 < |\beta| < \pi$. Es gibt ein $z \in \mathbb{R}^m_+$ mit $\cos\beta = (2^{-\langle y,z\rangle} - 1)$.
Dann ist $|\sin\beta| = \sin|\beta| = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - (2e^{-\langle y,z\rangle} - 1)^2}$
$= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \binom{1/2}{j} (2e^{-\langle y,z\rangle} - 1)^{2j}$.

Nun setzen wir $t^{y,\beta} := (2\exp_z - 1) + i\,\mathrm{sign}(\beta)\sqrt{1 - (2\exp_z - 1)^2} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m_+)$.
Es ist $|t^{y,\beta}(x)| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,t^{y,\beta}(x))^2 + (\mathrm{Im}\,t^{y,\beta}(x))^2} = 1 = t^{y,\beta}(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m_+$. Natürlich gilt: $t^{y,\beta}(0)e^{i\beta} = t^{y,\beta}(y)$.

Setzt man nun weiterhin

$$t_n^{y,\beta} := (2\exp_z - 1) + i\,\mathrm{sign}(\beta)\Big(1 - \sum_{j=1}^{n} \binom{1/2}{j} (2\exp_z - 1)^{2j} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \binom{1/2}{j}\Big),$$

so ist $t_n^{y,\beta} \in \Theta$. Weiterhin gilt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \binom{1/2}{j} (2e^{-\langle x,z\rangle} - 1)^{2j} \leq \sum_{j=1}^{n} \binom{1/2}{j} (2e^{-\langle x,z\rangle} - 1) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \binom{1/2}{j} \leq 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}^m_+$ (, da $0 \leq (2e^{-\langle x,z\rangle} - 1)^{2j} \leq 1$ ist und $\sum_{j=1}^{\infty} \binom{1/2}{j} = 1$).

Zusammen folgt:

$$|\mathrm{Im}\,t_n^{y,\beta}| = \Big(1 - \sum_{j=1}^{n} \binom{1/2}{j} (2\exp_z - 1)^{2j} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \binom{1/2}{j}\Big) \leq \sqrt{1 - (2\exp_z - 1)^2}$$
$$= |\mathrm{Im}\,t^{y,\beta}|.$$

Außerdem gilt: $t_n^{y,\beta}(0) = 1$ und die Abschätzung:

$$|t_n^{y,\beta}(x)| = ((\mathrm{Re}\,t_n^{y,\beta}(x))^2 + (\mathrm{Im}\,t_n^{y,\beta}(x))^2)^{1/2} \leq 1 = t_n^{y,\beta}(0).$$

Also ist $t_n^{y,\beta} \in T$.

Es bleibt noch die gleichmäßige Konvergenz von $t_n^{y,\beta}$ gegen $t^{y,\beta}$ zu zeigen:

Da $|1-(2e^{-\langle x,z\rangle}-1)^{2j}| \leq 1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$ und $j \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$| t_n^{y,\beta} - t^{y,\beta}| \leq \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \binom{1/2}{j}(1-(2\exp_z-1)^{2j}\right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \binom{1/2}{j} .$$

Da nun $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \binom{1/2}{j}$ mit n gegen ∞ verschwindet, folgt daraus die gleichmäßige Konvergenz. □

2.20. <u>Hilfsatz:</u> Sei $y \in \mathbb{R}_+^m$ und $\beta \in \Pi$, sei $|y| := \sqrt{\langle y,y\rangle}$ und $\vec{1} := (1,\dots,1) \in \mathbb{R}_+^m$, dann ist

$s_{\beta,y} := (e^{i\beta}(\exp_y-1)+|y|)\exp_{\vec{1}} \in T$.

<u>Beweis:</u> Zuerst zeigen wir einmal, daß für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$

$0 \leq (|y| + 1 - \exp_y)\exp_{\vec{1}} \leq |y|$ ist.

Sei nun $t_y := (|y|+1-\exp_y)\exp_{\vec{1}}$, so ist $t_y \geq 0$ (für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$).

Da nun für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ $|y| \geq y_i$ ist für $i=1,\dots,m$, wobei $y = (y_1,\dots,y_m)$ ist, folgt damit für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ und alle $i = 1,\dots,m$:

$$\frac{d}{dx_i} t_y = ((y_i+1)\exp_y - (|y|+1))\exp_{\vec{1}} \leq 0$$

Das heißt, daß für alle Richtungen $x \in \mathbb{R}_+^m$ gilt:

$t_y(x+x') \leq t_y(x)$ für alle $x' \in \mathbb{R}_+^m$.

Damit ist $t_y \leq t_y(0) = |y|$.

Seien nun $y \in \mathbb{R}_+^m$ und $\beta \in \Pi$ beliebig. Es gilt:

$s_{\beta,y} = (e^{i\beta}(\exp_y -1)+|y|)\exp_{\vec{1}} \in \ominus$ und $s_{\beta,y}(0) = |y|$.

Weiterhin ist

$$|s_{\beta,y}|^2 = (\operatorname{Re} s_{\beta,y})^2 + (\operatorname{Im} s_{\beta,y})^2$$
$$= (\exp_{\vec{1}})^2 ((\exp_y-1)^2\cos^2\beta+2|y|(\exp_y-1)\cos\beta+|y|^2+(\exp_y-1)^2\sin^2\beta)$$

$= ((\exp_y - 1)^2 + 2|y|(\exp_y - 1)\cos\beta + y^2)(\exp_{\vec{1}})^2$.

Es ist nun zu zeigen, daß $|s_{\beta,y}|^2 \leq |y|^2$ ist.

Da nun $\beta \in \Pi$ ist, gilt :

$|s_{\beta,y}|^2 \leq ((\exp_y - 1)^2 + (1 - \exp_y) \cdot 2|y| + y^2)(\exp_{\vec{1}})^2$

$= (1 + |y| - \exp_y)^2(\exp_{\vec{1}})^2$.

Letzteres ist aber wegen der zuanfang angestellten Überlegungen kleiner gleich $|y|^2$.

Also ist $\|s_{\beta,y}\|_\infty = |y| = s_{\beta,y}(0)$, womit $s_{\beta,y} \in T$ ist für alle $y \in R_+^m$ und $\beta \in \Pi$. □

2.21. <u>Lemma:</u> Ist $f : R_+^m \longrightarrow \mathbb{C}$ dissipativ mit $f(\vec{1}) = -1$, so gilt für alle $x \in R_+^m$:

$| f(x + \vec{1}) + 1 | \leq |x|$.

<u>Beweis:</u> Aus 2.20. folgt für alle $y \in R_+^m$ und $\beta \in \Pi$, daß $\mathrm{Re}(e^{i\beta}(f(y+\vec{1}) - f(\vec{1}))) + \mathrm{Re} f(\vec{1})\,|y| \leq 0$ ist.

Es folgt, daß $|f(y+\vec{1}) + 1| \leq |y|$ ist.

Dieses Lemma wird im Paragraphen 4 und 6 gebraucht. □

2.22. <u>Bezeichnung:</u> Für $c > 0$ und $j \in \{1,\dots,m\}$ sei durch $L_{c,j}(x_1,\dots,x_m) := (x_1,\dots,x_{j-1},cx_j,x_{j+1},\dots,x_m)$ ein Endomorphismus auf R^m definiert, der R_+^m fest läßt.

2.22'. <u>Lemma</u>: Ist $f : R_+^m \longrightarrow \mathbb{C}$ dissipativ, so ist $f \circ L_{c,j}$ ebenfalls dissipativ.

<u>Beweis:</u> Sei $t \in T$ mit $t = \sum_{k=1}^{n} d_k \exp_{y_k}$. Damit ist auch $t \circ L_{c,j} \in T$. Da $t \circ L_{c,j} = \sum_{k=1}^{n} d_k \exp_{L_{c,j}(y_k)}$ ist, folgt die Behauptung. □

Daraus folgt nun eine Bemerkung, die im Paragraphen 4 benötigt werden wird:

2.23. <u>Bemerkung:</u> Sei $y \in \mathbb{R}_+^m$, so gilt für den Endomorphismus A_y auf $\mathbb{R}_+^m$ der Form $A_y(x_1,\ldots,x_m):=(x_1y_1,\ldots,x_my_m)$, daß, wenn f dissipativ ist, auch $f\circ A_y$ dissipativ ist.
Die Umkehrung gilt ebenso, wenn $y_j \neq 0$ für alle $j=1,\ldots,m$ ist.
(Dabei beschreibe x_j die j-te Komponente von $x \in \mathbb{R}_+^m$)
<u>Beweis:</u> Der erste Teil folgt iterativ aus 2.22'. ,
der zweite aus der Überlegung, daß $A_y^{-1} = A_{\hat{y}}$ ist mit
$\hat{y}:=(\frac{1}{y_1},\ldots,\frac{1}{y_m})$. $\square$

<u>Bemerkungen zum Paragraphen 2 :</u>

J. Faraut hat in seiner Arbeit [7] die linearen, (straffen) dissipativen Funktionale untersucht und zeigte unter anderem, daß die Fouriertransformierten von diesen Distributionen auf $\mathbb{R}^m$ die dissipativen Funktionen auf $\mathbb{R}^m$ (in seinem Sinne) sind.
Analog sind die Laplacetransformierten von linearen (straffen) dissipativen Distributionen auf $\mathbb{R}_+^m$ die dissipativen Funktionen auf $\mathbb{R}_+^m$ (im Sinne der Definition 2.2.(ii)) , was damit die Nomenklatur von 2.2.(ii) erklärt.
Der Begriff " vollständig dissipativ " (2.2.(i)) wurde von mir in Ermangelung eines womöglich treffenderen gefaßt.
(Ich muß zugeben, daß dies Bezeichnung nicht allzu glücklich gewählt ist, dennoch möchte ich sie so stehen lassen.)
Das Ziel dieses Paragraphen ist es, (für den Paragraphen 4) die Möglichkeit zu schaffen, die Extrempunkte eines spitzen Kegels $P \cong Q/(Q\cap -Q)$ zu berechnen.
Die Beweisführung in den Bemerkungen und Lemmata dieses Paragraphen ist weitesgehend durch folgendes Konzept geprägt:

Zuerst werden entsprechend geeignete Testfunktionen aus T erarbeitet, und hernach werden die Rückschlüsse für die dissipativen Funktionen gezogen.

Das Lemma 2.21., welche in dieser Arbeit lediglich im Paragraphen 6 Anwendung findet, könnte in etwas allgemeinerer Form (- etwa wenn $\vec{1}$ durch ein beliebiges $a \in ((0,\infty))^m$ ersetzt wird und der rechte Teil der Abschätzung mit einer von a abhängenden Konstante multipliziert wird -) die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von dissipativen Funktionen auf $((0,\infty))^m$ beweisen helfen.

§ 3 Die Laplacetransformation auf $\mathbb{R}_+^m$

Dieser Paragraph führt ein wenig fort von der Richtung des durch den Pragraphen 2 eingeschlagenen Weges. Der Inhalt beleuchtet unter anderem die Bedeutung der vollständig dissipativen Funktionen und soll an dieser Stelle eher eine erläuternde Funktion haben, zumal die hier erarbeiteten Ergebnisse erst im Paragraphen 6 Anwendung finden.

3.1. Definition: (i) $L^1(\mathbb{R}_+^m)$ beziehungsweise $L^\infty(\mathbb{R}_+^m)$ bezeichne den Banach- Raum aller Äquivalenzklassen komplexwertiger, Lebesgue- integrierbarer beziehungsweise wesentlich beschränkter Funktionen auf $\mathbb{R}_+^m$ mit der Norm $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}_+^m} |f(x)|\, dx$

beziehungsweise $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f|$.

Da Verwechslungen ausgeschlossen werden können, schreiben wir auch kurz L^1 beziehungsweise L^∞.

(ii) Auf L^1 ist die Laplacetransformierte definiert als

$\mathcal{L}(f) := \int_{\mathbb{R}_+^m} \exp_x f(x)\, dx \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^m)$ für $f \in L^1$.

(iii) Sei $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^m)$ der Banach- Raum der stetigen, im unendlichen verschwindenden Funktionen auf $\mathbb{R}_+^m$ (versehen mit $\| \|_\infty$).

Auf $A := (L^1 \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^m))$ sei eine Norm durch

$\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$ für alle $f \in A$ definiert.

3.2. Bemerkung: (i) $(A, \| \|_{1,\infty})$ ist ein komplexer Banach- Raum.

(ii) $\mathcal{L}$ ist ein stetiger, linearer Operator von L^1 nach $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^m)$ mit Operatornorm ≤ 1.

3.3. Bemerkung: Der Unterraum $\mathcal{C}_*(\mathbb{R}_+^m)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger liegt dicht in A bezüglich der $\| \|_{1,\infty}$ -Norm.

Beweis: Sei $W_n := \langle x \in \mathbb{R}_+^m \mid |x| \leq n \rangle$ für $n \in \mathbb{N}$.

Nun gibt es $g_n \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R}_+^m)$ mit $g_n|_{W_n} = 1$, $g_n|_{W_{n+1}} = 0$ und

$0 \leq g_n \leq 1$.

Ist nun $f \in A$, so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\| f|_{\mathbb{R}_+^m \setminus W_n} \|_\infty \leq \varepsilon/2$ und $\int_{(\mathbb{R}_+^m \setminus W)} |f(x)|\, dx \leq \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$ ist.

Für $f_n := g_n f$ gilt, daß f_n gegen f in der $\| \ \|_{1,\infty}$-Norm konvergiert, woraus die Behauptung folgt. □

3.4. <u>Lemma:</u> $\mathcal{L}(\mathcal{C}_*(\mathbb{R}_+^m))$ liegt dicht in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^m)$ bezüglich der $\| \ \|_\infty$ - Norm.

<u>Beweis:</u> Wegen 3.3. und 3.2.(ii) bleibt noch zu zeigen, daß $\mathcal{L}(A)$ dicht in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^m)$ liegt bezüglich der $\| \ \|_\infty$- Norm:

Dazu betrachten wir folgende Funktionen:

Für $n \in \mathbb{N}^m$ setzen wir $g_n(x) := x^n e^{-\langle x, \vec{1} \rangle}$ (mit $x^n := \prod_{i=1}^m x_i^{n_i}$)

für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$, so ist $g_n \in A$. Zudem ist

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} g_n(x)dx = \prod_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}_+} x_i^{n_i} e^{-x_i(y_i+1)}\, dx_i = \prod_{i=1}^m \frac{n_i!}{(y_i+1)^{(n_i+1)}}$$

$= \frac{n!}{(y+\vec{1})^{(n+\vec{1})}}$ (in der Multiindexschreibweise).

Es folgt damit, daß $\mathcal{L}(g_n) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^m)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}^m$.

Wir zeigen nun, daß der von $(\mathcal{L}(g_n))_{n \in \mathbb{N}^m}$ aufgespannte komplexe Untervektorraum dicht in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^m)$ liegt:

Dazu setzen wir nun $\phi : ((0,1])^m \to \mathbb{R}_+^m$ definiert durch $\phi(t) := (\frac{1}{t_1} - 1, \dots, \frac{1}{t_m} - 1)$ für alle $t \in ((0,1])^m$.

So ist $\phi^{-1}(x) = (\frac{1}{1+x_1}, \dots, \frac{1}{1+x_m})$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$.

Sei nun $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^m)$ beliebig, aber fest, so definieren wir mit $F := f \circ \phi \in \mathcal{C}(((0,1])^m)$ eine Funktion, die mit 0 auf $([0,1])^m$ sich stetig fortsetzen läßt.

Nach Bernstein gibt es für alle $r \in \mathbb{N}^m$ ein Polynom b_r mit

$$b_r(t) := \sum_{n_1=0}^{r_1}, \dots, \sum_{n_m=0}^{r_m} F(\frac{n_1}{r_1}, \dots, \frac{n_m}{r_m}) \prod_{j=1}^m \binom{r_j}{n_j} t_j^{n_j} (1-t_j)^{(r_j - n_j)}, \qquad (*)$$

so daß b_r gleichmäßig gegen F auf $([0,1])^m$ konvergiert.

Da nun f im unendlichen verschwindet, so können wir in (*)

die Summen mit 1 anstelle von 0 anfangen lassen.

Setzt man nun $f_r := b_r \cdot \phi^{-1} \in \mathcal{C}_o(\mathbb{R}_+^m)$, so ist

$$f_r(x) = \sum_{n_1=1}^{r_1},\ldots,\sum_{n_m=1}^{r_m} F\left(\frac{r_1}{n_1},\ldots,\frac{r_m}{n_m}\right) a_n(x), \text{ wobei für alle } x \in \mathbb{R}_+^m$$

$a_n^r(x) := \prod_{i=1}^{m} \binom{r_i}{n_i} \left(\frac{1}{1+x_i}\right)^{n_i} \left(1-\frac{1}{1+x_i}\right)^{(r_i-n_i)}$ sei (r,n in Multiindexschreibweise) . Löst man auch das auf, so ist

$$a_n^r(x) = \prod_{i=1}^{m} \binom{r_i}{n_i} \sum_{j=0}^{r_i-n_i} \binom{r_i-n_i}{j} (-1)^{j+1} \left(\frac{1}{1+x_i}\right)^{(r_i-j)}.$$

Diese a_n^r sind für f_r aber immer ungleich einer Konstanten, was unmittelbar daraus folgt, daß $n_i \neq 0$ ist für alle $i=1,\ldots,m$.

Also ist $f_r \in \mathcal{C}_o(\mathbb{R}_+^m)$ für alle $r \in \mathbb{N}^m$ und läßt sich darstellen als Linearkombination von Funktionen der Form $x \mapsto \frac{n!}{(x+1)^{(n+1)}}$ mit $n \in \mathbb{N}^m$ in der Multiindexschreibweise.

Diese Funktionen sind bekanntlich die $\mathcal{L}(g_n)$ mit $n \in \mathbb{N}^m$.

Die gleichmäßige Konvergenz von f_r gegen f auf $\mathbb{R}_+^m$ folgt unmittelbar aus der von b_r gegen F auf $([0,1])^m$(für $r_i \to \infty$ für alle $i=1,\ldots,m$) .

Da nun $f \in \mathcal{C}_o(\mathbb{R}_+^m)$ beliebig gewählt wurde, folgt, daß der von $(\mathcal{L}(g_n))_{n \in \mathbb{N}^m}$ aufgespannte komplexe UnterVektorraum in $\mathcal{C}_o(\mathbb{R}_+^m)$ dicht liegt, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Nun wollen wir eine zu 2.2.(i) analoge Definition bringen, die - wie sich herausstellen wird - für stetige Funktionen äquivalent zu der von 2.2.(i) ist :

3.5. Definition: Eine Funktion $f \in L^\infty$ heißt integral vollständig dissipativ, wenn es eine majorisierende Konstante $c \geq 0$ gibt, so daß für alle $h \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R}^m_+)$ gilt:

$\left|\int_{\mathbb{R}^m_+} f(x)h(x)dx\right| \leq c\,\|\mathcal{L}(h)\|_\infty$.

3.6. <u>Bemerkung:</u> Ist $f \in U$ (also vollständig dissipativ und stetig), so ist f integral vollständig dissipativ.

<u>Beweis:</u> Die Approximation des Integrals $\int_{\mathbb{R}^m_+} f(x)h(x)dx$ durch Riemannsummen liefert die Behauptung. □

3.7. <u>Satz:</u> Ist $f \in L^\infty$ integral vollständig dissipativ, dann gibt es ein $\mu \in M_b(\mathbb{R}^m_+)$ mit $f = \mathcal{L}(\mu)$ fast überall und umgekehrt.

<u>Beweis:</u> "$\Leftarrow$": Folgt aus 3.6. und 2.5.

"$\Rightarrow$": Sei $A: \mathcal{L}(\mathcal{C}_*(\mathbb{R}^m_+)) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$\langle A, \mathcal{L}(h)\rangle := \int_{\mathbb{R}^m_+} h(x)f(x)dx$.

(A ist wohldefiniert, denn sind $g,h \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R}^m_+)$ mit $\mathcal{L}(g)=\mathcal{L}(h)$, so gilt: $\left|\int_{\mathbb{R}^m_+} f(x)(h-g)(x)dx\right| \leq c\,\|\mathcal{L}(h-g)\|_\infty = 0$.)

A ist linear und stetig bezüglich $\|\ \|_\infty$, was unmittelbar aus der Definition 3.5. folgt.

A ist beschränkt durch die majorisierende Konstante c .

Da nun nach 3.4. $\mathcal{L}(\mathcal{C}_*(\mathbb{R}^m_+))$ dicht in $\mathcal{C}_o(\mathbb{R}^m_+)$ liegt, gibt es eine eindeutige stetige Fortsetzung von A auf $\mathcal{C}_o(\mathbb{R}^m_+)$ – sie heiße $\hat{A}$.

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es ein $\mu \in M_b(\mathbb{R}^m_+)$ mit $\langle\hat{A}, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^m_+} g(x)\,\mu(dx)$ für alle $g \in \mathcal{C}_o(\mathbb{R}^m_+)$.

Definiert man nun $B \in (\mathcal{C}_o(\mathbb{R}^m_+))'$ durch

$\langle B, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^m_+} (f(x) - \mathcal{L}(\mu)(x))g(x)dx$ für alle $g \in \mathcal{C}_o(\mathbb{R}^m_+)$, dann gilt: $B|_{\mathcal{C}_*(\mathbb{R}^m_+)} = 0$. Es folgt: $B = (f - \mathcal{L}(\mu))\lambda = 0$, also ist $f = \mathcal{L}(\mu)$ λ- fast überall, wobei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^m_+$ bezeichne. □

Daraus folgt nun unmittelbar:

3.8. Bemerkung: (i) Jede integral vollständig dissipative Funktion besitzt eine stetige Version.

(ii) Ist $f \in U$, so gibt es ein $\mu \in M_b(\mathbb{R}_+^m)$ mit $\mathcal{L}(\mu) = f$.

((i) wird noch im Paragraphen 6 Anwendung finden.)

Der Vollständigkeit halber sei noch die Injektivität der Laplacetransformation auf dem Raum der temperierten Distributionen*) auf $\mathbb{R}_+^m$ gezeigt. Dazu brauchen wir noch einige Vorbemerkungen:

3.9. Definition: (i) Ist $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ ein offenes Gebiet, so bezeichne $\mathcal{H}(\Omega)$ den Raum der holomorphen Funktionen auf Ω.

(ii) Sei $G := \{ z \in \mathbb{C}^m \mid \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}_+^m \}$ und $\overset{\circ}{G}$ das Innere von G.

(iii) Auf dem Raum der temperierten Distributionen*) auf $\mathbb{R}_+^m$ sei mit $\tilde{\mathcal{L}}(A)(z) := \langle A, \exp_z \rangle$ für alle $z \in G$ die Laplacetransformation durch $A \longmapsto \mathcal{L}(A) := \tilde{\mathcal{L}}(A)\big|_{\mathbb{R}_+^m}$ (für alle temperierten Distributionen A auf $\mathbb{R}_+^m$) definiert, wobei für alle $z \in G$ $\exp_z : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{C}$ durch $\exp_z(x) := e^{-\langle x, z \rangle}$ erklärt sei.

3.9'. Bemerkung: Für eine temperierte Distribution A auf $\mathbb{R}_+^m$ ist $\tilde{\mathcal{L}}(A) \in \mathcal{H}(\overset{\circ}{G})$ und stetig fortsetzbar auf G.

3.10. Bemerkung: Ist $f \in \mathcal{H}(\overset{\circ}{G})$ mit $f\big|_{\mathbb{R}_+^m} = 0$, so ist $f = 0$.

Beweis: Nach einem Satz aus der Funktionentheorie verschwindet ein $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, wenn Ω ein offenes zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}^m$ ist, und es ein $b \in \Omega$ gibt mit $h\big|_{\Omega \cap (b + \mathbb{R}^m)} = 0$.
(Siehe J.Dieudonné:"Foundations of Modern Analysis Vol.1" N.Y. 1969 (9.4.4).) Da $\overset{\circ}{G}$ ein zusammenhängendes offenes Gebiet in $\mathbb{C}^m$ ist und für ein $f \in \mathcal{H}(\overset{\circ}{G})$ mit $f\big|_{\mathbb{R}_+^m} = 0$ für alle $\varepsilon > 0$ auch $f\big|_{\overset{\circ}{G} \cap (\varepsilon \vec{1} + \mathbb{R}_+^m)} = 0$ ist, folgt die Behauptung. □

*) siehe dazu auch L.Jantscher :"Distributionen" Berlin: de Gruyter Kapitel IX und XI .

3.10. <u>Satz:</u> Die Laplacetransformation ist injektiv auf dem Raum der temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}_+^m$.

<u>Beweis:</u> Es gilt: $\tilde{\mathcal{L}}(A)\Big|_{\mathbb{R}_+^m} = \mathcal{L}(A)$.

Da die Laplacetransformation $\mathcal{L}$ auf dem Raum der temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}_+^m$ ein Vektorraumhomomorphismus ist, bleibt zu zeigen, daß aus $\mathcal{L}(A) = 0$ folgt, daß $A = 0$ ist.

Nach 3.9. folgt, daß mit $\mathcal{L}(A) = 0$ auch $\tilde{\mathcal{L}}(A) = 0$ ist und damit auch $\tilde{\mathcal{L}}(A)(iy) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^m$ ist, womit die Fouriertransformierte von A verschwindet. Aus der bekannten Injektivität der Fouriertransformation folgt schließlich die Behauptung. □

3.11. <u>Bemerkung:</u> Da der Raum der temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}_+^m$ auch den Raum der beschränkten Borelmaße auf $\mathbb{R}_+^m$ (bis auf Isomorphie) beinhaltet, folgt, daß die in 2.4. definierte Laplacetransformation injetiv ist, und eine nach 3.8.(ii) auf U definierte Inverse besitzt.

<u>Bemerkungen zum Paragraphen 3 :</u>

Dieser Paragraphen dient der genaueren Einordnung der vollständig dissipativen, stetigen Funktionen.

Die zusätzliche Definition der integral vollständig dissipativen Funktionen liefert zusammen mit der Bemerkung 3.8. ein weiteres Hilfsmittel für die Beweisführung im Paragraphen 6 .

Die in 3.2. bis 3.4. aufgeführte Eigenschaft, daß $\mathcal{L}(A)$ in $\mathcal{E}_0(\mathbb{R}_+^m)$ dicht liegt, ist eine zwar bekannte; aber mir ist bislang noch kein Beweis dazu aufgefallen.

Die Injektivität der Laplacetransformation interessiert in diesem Rahmen nur am Rande, aber diese Eigenschaft sollte dennoch bemerkt werden, zumal ihr im Paragraphen 7 noch einige Bedeutung zukommt.

§ 4 Der Kegel P, seine Basis M, und deren Extrempunkte

Dieser Paragraph dient vornehmlich der Bestimmung der Extrempunktmenge einer Basis des spitzen Kegels Q der stetigen, dissipativen Funktionen auf $\mathbb{R}_+^m$ modulo $Q \cap -Q$. Ihm liegen lediglich die Ergebnisse des Paragraphen 2 (und in Satz 4.4. auch noch der Satz 1.11.) zugrunde.

4.1. Definition: (i) $P := \{ f \in Q \mid f(\vec{1}) \in \mathbb{R} \}$,

(ii) $M := \{ f \in P \mid f(\vec{1}) = -1 \}$,

(dabei sei $\vec{1} := (1,\dots,1) \in \mathbb{R}_+^m$).

4.2. Bemerkung: (i) Für alle $f \in Q$ gibt es ein $\tilde{f} \in P$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = \tilde{f} + ic$.

(ii) P ist ein spitzer konvexer Kegel, M ist eine Basis von P.

(iii) Es ist $f \in M$ genau dann, wenn für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$

$\operatorname{Re} f(x+\vec{1}) \leq |x| - 1$, $\operatorname{Re} f(x+\vec{1}) \geq -|x| - 1$ und $|\operatorname{Im} f(x+\vec{1})| \leq |x|$ ist.

Beweis: (i): Trivial.

(ii): Aus 2.7.(i), 2.12. und 2.18. folgt, daß P ein spitzer konvexer Kegel ist; daß M eine Basis ist, folgt trivial.

(iii): Folgt trivial aus 2.21. □

4.3. Satz: Die Extrempunkte von M liegen unter folgenden Funktionen:

(i) $f_0^i := 1_{e_i}$ für $i \in \{1,\dots,m\}$ (1_y sei die in 2.17.(ii) eingeführte Funktion mit $y \in \mathbb{R}_+^m$, e_i die Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^m$)

und

(ii) $f_{z,\vartheta} := \dfrac{e^{i\vartheta}\exp z - 1 - ie^{-\langle \vec{1}, z\rangle}\sin\vartheta}{1 - e^{-\langle \vec{1}, z\rangle}\cos\vartheta}$ für $\vartheta \in \Pi := (-\pi,\pi]$

und $z \in \mathbb{R}_+^m - \{0\}$.

Beweis: Ist $f \in M$, so gibt es nach 2.16 (für $\vartheta = 0$) für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ ein $a_y \in [0,1]$ mit $f - f_y + a_y f(y) \in Q$ und $f_y - a_y f(y) \in Q$.

Damit ist $K_y^+ := f - f_y + a_y f(y) + i\,\mathrm{Im}(f(y+\vec{1}) - a_y f(\vec{y})) \in P$ und

$K_y^- := f_y - a_y f(y) - i\,\mathrm{Im}(f(y+\vec{1}) - a_y f(y)) \in P$ für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$.

Es ist für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$: $f = \frac{1}{2}(K_y^+ + K_y^-)$.

Ist nun $f \in M$ extrem, so folgt aus $f = \frac{1}{2}(K_y^+ + K_y^-)$, daß auch K_y^+, K_y^- extrem im spitzen konvexen Kegel P liegen, und daß es ein $\mu_y \geq 0$ gibt mit $\mu_y f = K_y^-$.

Das heißt : $\mu_y f = f_y - a_y f(y) - i\,\mathrm{Im}(f(y+\vec{1}) - a_y f(y))$.

Setzt man $\vec{1}$ ein, so gilt für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$:

$\mu_y = a_y \mathrm{Re} f(y) - \mathrm{Re} f(y+\vec{1})$.

Setzt man nun oben dieses μ_y ein, so gilt für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$:

(1) $(a_y \mathrm{Re} f(y) - \mathrm{Re} f(y+\vec{1}))f = f_y - a_y \mathrm{Re} f(y) - i\,\mathrm{Im} f(y+\vec{1})$.

Setzt man darin 0 ein, so gilt für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$:

(2) $a_y \mathrm{Re} f(y)(1+f(0)) = f(0)\mathrm{Re} f(y+\vec{1}) + f(y) - i\,\mathrm{Im} f(y+\vec{1})$.

Nehmen wir nun im folgenden an, daß $f(0) \neq -1$ ist. Den Fall, daß $f(0) = -1$ ist für ein extremes $f \in M$, behandeln wir am Ende dieses Beweises und zeigen, daß er gar nicht auftreten kann.

Sei also $f(0) \neq -1$.

So können wir in (1) die Gleichung (2) einsetzen und folgern für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$:

$(f(0)\mathrm{Re} f(y+\vec{1}) + f(y) - i\,\mathrm{Im} f(y+\vec{1}) - (1+f(0))\mathrm{Re} f(y+\vec{1}))f =$

$= (f_y - i\,\mathrm{Im} f(y+\vec{1}))(1+f(0)) - f(0)\mathrm{Re} f(y+\vec{1}) - f(y) + i\,\mathrm{Im} f(y+\vec{1})$

$\iff$

$(f(y) - f(y+\vec{1}))f = (1+f(0))f_y - f(0)f(y+\vec{1}) - f(y)$.

Setzt man nun $x \in \mathbb{R}_+^m$ und $x+\vec{1}$ ein , so folgt für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$:

$(f(x) - f(x+\vec{1}))(f(y) - f(y+\vec{1})) = (f(x+y) - f(x+y+\vec{1}))(f(0) - f(\vec{1}))$.

Da nun $f - f_{\vec{1}}$ die Cauchysche Funktionalgleichung erfüllt, stetig und wegen 2.9.(iii) beschränkt ist, gibt es ein $z \in \mathbb{R}_+^m$ mit

(3) $f - f_{\vec{1}} = \exp_z \cdot (f(0)+1)$.

Andererseits ist nach (2) für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$

$a_y \mathrm{Re} f(y)(f(0)+1) = (f(0)+1)\mathrm{Re} f(y+\vec{1}) + f(y) - f(y+\vec{1})$

$$= (f(0)+1)(\mathrm{Re}f(y+\widehat{1}) + e^{-\langle y,z\rangle}) \quad .$$

Weil nun $f(0) \neq -1$ ist, folgt für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$:

(3 a) $a_y \mathrm{Re}f(y) = \mathrm{Re}f(y+\widehat{1}) + e^{-\langle y,z\rangle}$.

Mit der Gleichung (1) heißt das für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$:

$(\mathrm{Re}f(y+\widehat{1}) + e^{-\langle y,z\rangle} - \mathrm{Re}f(y+\widehat{1}))f$

$= \; f_y - \mathrm{Re}f(y+\widehat{1}) - i\mathrm{Im}f(y+\widehat{1}) - e^{-\langle y,z\rangle}$

$\Longleftrightarrow$

(4) $e^{-\langle y,z\rangle}f = f_y - f(y+\widehat{1}) - e^{-\langle y,z\rangle}$.

Nun wollen wir die Extrempunkte von M explizit berechnen.

Dazu benötigen wir folgende Fallunterscheidungen:

<u>1.Fall: " $z = 0$ "</u>

Es folgt aus (3) und (4) für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$:

$f = f_y - f(y+\widehat{1}) - 1 = f_y - f(y) + f(0)$, woraus folgt, daß

$f - f(0)$ linear , ungleich null ist oder verschwindet.

Wäre $f-f(0) = 0$, so wäre $f(0) = f(\widehat{1}) = -1$, was wir ausgeschlossen hatten.

Also muß $f - f(0)$ linear und ungleich null sein.

Andererseits folgt aus den Gleichungen (3 a) und (3) , daß

für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$

$a_y\mathrm{Re}f(y) = \mathrm{Re}f(y+\widehat{1}) + 1 = \mathrm{Re}f(y) - \mathrm{Re}f(0)$ ist.

Mit 2.16. (und der Definition des a_y) und 2.7.(ii) folgt

für alle $\beta \in \Pi$ und $y \in \mathbb{R}^m_+$:

$e^{i\beta}(f-f_y) + \mathrm{Re}f(y) - \mathrm{Re}f(0) = e^{i\beta}(f-f_y) + a_y\mathrm{Re}f(y) \in Q$.

Setzt man nun $\beta := -\arg(f(0)-f(y))$, so folgt mit 2.7.(iii),

daß $|f(y)-f(0)| \leq \mathrm{Re}f(0)-\mathrm{Re}f(y)$ ist.

Da nun $y \in \mathbb{R}^m_+$ beliebig gewählt werden kann, folgt, daß

$\mathrm{Im}f(y) = \mathrm{Im}f(0) = \mathrm{Im}f(\widehat{1}) = 0$ ist für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$.

Damit ist $\mathrm{Re}f = f$.

Da $f - f(0)$ linear, reell und nach oben beschränkt ist, gibt es ein $a \in R_+^m$, so daß $f = f(0) + 1_a$ ist (wobei 1_a die in 2.17.(ii) definierte Funktion sei) .

Weil sowohl $x \longmapsto f(0)$ wie auch 1_a dissipativ und stetig ist, muß $f = 1_a$ sein, da $f \in M$ extrem sein soll, und $f(0) \neq -1$ ist.

Ist nun $a = (a_1, \dots, a_m)$, so ist $1_a = \sum_{j=1}^{m} a_j 1_{e_j}$ (- wobei e_j den j-ten Einheitsvektor in R^m beschreiben soll) .

Aus der Extremaleigenschaft von $f \in M$ folgt nun wieder, daß $f = 1_{e_j}$ sein muß für ein $j \in \{1, \dots, m\}$.

Damit kommen wir zum

<u>2.Fall: " $z \neq 0$ "</u>

Aus der Gleichung (4) folgt für $y = \vec{1}$:

$$
\begin{aligned}
e^{-\langle\vec{1},z\rangle} f &= f_{\vec{1}} - f(2\cdot\vec{1}) - e^{-\langle\vec{1},z\rangle} \\
&= f_{\vec{1}} + f(\vec{1}) - f(2\cdot\vec{1}) - e^{-\langle\vec{1},z\rangle} + 1 \\
&= f_{\vec{1}} + e^{-\langle\vec{1},z\rangle}(f(0)+1) - e^{-\langle\vec{1},z\rangle} + 1 \\
&= f_{\vec{1}} + f(0)e^{-\langle\vec{1},z\rangle} + 1 .
\end{aligned}
$$

Das bringt uns unmittelbar zur Gleichung

$$
\begin{aligned}
(5) \quad (1 - e^{-\langle\vec{1},z\rangle}) f &= f - f_{\vec{1}} - 1 - e^{-\langle\vec{1},z\rangle} f(0) \\
&= \exp_z (f(0)+1) - 1 - e^{-\langle\vec{1},z\rangle} f(0) .
\end{aligned}
$$

Ist nun $t \in T$ mit $t = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp_{x_j}$, so gilt wegen der Dissipativität von f :

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} c_j f(x_j)(1 - e^{-\langle\vec{1},z\rangle}) \\
&= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} c_j (e^{-\langle x_j,z\rangle}(f(0)+1) - 1 - e^{-\langle\vec{1},z\rangle} f(0)) \\
&= \operatorname{Re}(t(z)(f(0)+1)) - t(0)(1 + e^{-\langle\vec{1},z\rangle} \operatorname{Re} f(0)) .
\end{aligned}
$$

Daraus folgt für alle $t \in T$:

$$
(6) \quad \operatorname{Re}(t(z)(f(0)+1)) \leq (1 + e^{-\langle\vec{1},z\rangle} \operatorname{Re} f(0)) t(0) .
$$

Zur expliziten Darstellung dieses f zeigen wir zuerst folgendes:

Ist $\arg(f(0)-f(\vec{1})) = \beta$, so ist $|f(0)-f(\vec{1})| \leq \dfrac{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta}$.

Sei $t_n^{z,\beta} \in T$ für $n \in N$ eine Folge , die gleichmäßig gegen ein stetiges und beschränktes t konvergiert, für welches $t(0) = e^{i\beta}t(z) = 1$ ist, mit $\beta=\arg(f(0)-f(\vec{1}))$ (wie zum Beispiel in 2.19.), so folgt, wenn man diese $t_n^{z,\beta}$ in (6) einsetzt und n gegen ∞ gehen läßt:

$$e^{-i\beta}(f(0)+1) = |f(0)+1| \leq 1+e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\operatorname{Re}f(0).$$

Zudem gilt: $\operatorname{Re}f(0)+1 = |f(0)+1|\cos\beta$, woraus folgt, daß $\operatorname{Re}f(0) = |f(0)+1|\cos\beta-1$ ist.

Beides zusammen heißt dann:

$|f(0)+1| \leq 1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}+|f(0)+1|\cos\beta\; e^{-\langle\vec{1},z\rangle}$, was zeigt, daß

$$|f(0)+1| \leq \frac{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta} \quad \text{ist.}$$

Das heißt, daß es ein $\eta \in (0,1]$ mit $|f(0)+1| = \eta\dfrac{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta}$.

Mit (5) gilt dann:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(e^{-\langle x,z\rangle}(f(0)+1)-1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}f(0)\right)\frac{1}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}}\\
&= \left(e^{-\langle x,z\rangle}(f(0)+1)-1+e^{-\langle\vec{1},z\rangle}-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}(f(0)+1)\right)\frac{1}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}}\\
&= \frac{\left(\eta e^{i\beta}(e^{-\langle x,z\rangle}-e^{-\langle\vec{1},z\rangle})\dfrac{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta}-1+e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\right)}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}}\\
&= \eta\, e^{i\beta}(e^{-\langle x,z\rangle}-e^{-\langle\vec{1},z\rangle})\frac{1}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta}-1\\
&= \eta\,\frac{e^{i\beta}e^{-\langle x,z\rangle}-1-ie^{-\langle\vec{1},z\rangle}\sin\beta}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta}+(1-\eta)(-1)
\end{aligned}$$

Da $f \in M$ extrem sein soll und $f\neq-1$, folgt: $\eta = 1$.

Also ist $f = f_{z,\beta}$ für ein $z \in R_+^m-\{0\}$ und $\beta \in \Pi$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß ein $f \in M$ mit $f(0) = -1$ nicht extrem in M liegen kann.

Nehmen wir also an, $f \in M$ sei extrem mit $f(0) = -1$.

Es gilt zunächst, daß $f \neq -1$ ist, denn sonst wäre $f = \frac{1}{2}(f_{z,-\pi/2} + f_{z,\pi/2})$ für ein $z \in \mathbb{R}_+^m$ mit $z \neq 0$.

Also gibt es ein $y \in ((0,\infty))^m$ mit $f(y) \neq -1$ (-da f stetig ist).

Sei $\hat{y} := (\frac{1}{y_1}, \ldots, \frac{1}{y_m}) \in \mathbb{R}_+^m$, wobei $y = (y_1, \ldots, y_m)$ ist.

$A_y : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}_+^m$ sei der in 2.23. beschriebene Automorphismus auf $\mathbb{R}_+^m$, $A_{\hat{y}} := (A_y)^{-1}$ seine Umkehrabbildung.

Wegen 2.23. ist $f \circ A_y \in Q$, und wegen 2.18. ist $\mathrm{Re} f(y) \neq 0$.

Daher können wir $F_y := (f \circ A_y - i\mathrm{Im}(f \circ A_y(\vec{1})))\frac{1}{-\mathrm{Re} f(y)} \in M$ setzen.

Es gilt : $F_y(0) = (-1 - i\mathrm{Im} f(y))\frac{1}{-\mathrm{Re} f(y)} \neq -1$.

Nehmen wir nun an, F_y wäre nicht extrem. So gibt es $\mu \in (0,1)$ und $g, h \in M$ mit $\mu g + (1-\mu)h = F_y$ und $g, h \neq F_y$.

Mit den gleichen Argumenten wie oben, gilt :

$$G_{\hat{y}} := \frac{g \circ A_{\hat{y}} - i\mathrm{Im}\, g \circ A_{\hat{y}}(\vec{1})}{-\mathrm{Re}\, g \circ A_{\hat{y}}(\vec{1})} \in M \quad \text{und} \quad H_{\hat{y}} := \frac{h \circ A_{\hat{y}} - i\mathrm{Im}\, h \circ A_{\hat{y}}(\vec{1})}{-\mathrm{Re}\, h \circ A_{\hat{y}}(\vec{1})} \in M \quad .$$

Auch gilt, daß $\tilde{\mu} := \mu(\mathrm{Re}\, g \circ A_{\hat{y}}(\vec{1}))\frac{1}{\mathrm{Re} F_y \circ A_{\hat{y}}(\vec{1})} \in (0,1)$ ist, was sich leicht anhand der Konvexlineardarstellung von F_y (-setzt man dort $\hat{y} = A_{\hat{y}}(\vec{1})$ ein-) und 2.18. verifizieren läßt.

Damit heißt das, daß $\tilde{\mu} G_{\hat{y}} + (1-\tilde{\mu})H_{\hat{y}} = f$ ist, wobei $G_{\hat{y}}, H_{\hat{y}} \neq f$ ist, was ein Widerspruch zur Extremität von f darstellt.

Also muß auch $F_y \in M$ extrem sein. Da nun $F_y(0) \neq -1$ ist, muß sich $F_y = f_{z,\beta}$ für ein $z \in \mathbb{R}_+^m - \{0\}$ und $\beta \in \Pi - \{0\}$ darstellen lassen, da auch $F_y(0) \neq 0$ ist.

(Dies folgt unmittelbar aus dem vorangegangenen notwendigen Bedingungen für die Extremität von $f \in M$ mit $f(0) \neq -1$.)

Nun ist aber $f = \dfrac{F_y \cdot A_{\hat{y}} - i\,\mathrm{Im}F_y \cdot A_{\hat{y}}(\widehat{1})}{-\mathrm{Re}F_y \cdot A_{\hat{y}}(\widehat{1})} = f_{A_{\hat{y}}(z),\beta}$, und damit

wäre $f(0) = f_{A_{\hat{y}}(z),\beta}(0) \neq -1$.

Resumierend läßt sich sagen: Ist $f \in M$ extrem, so ist f unter folgenden Funktionen: f_0^j , $f_{z,\beta}$ wobei $j \in \{1,\ldots,m\}$ und $z \in R_+^m - \{0\}$, $\beta \in (-\pi,\pi]$ ist. $\square$

<u>Bemerkung:</u> Der letzte Teil des Beweises - der Fall "$f \in M$ ist extrem und $f(0)=-1$" - gestaltet sich allein deshalb so zäh, weil - wie leicht zu sehen ist - $f_{\overrightarrow{n1},0}$ punktweise gegen -1 geht für n gegen ∞ .
Damit übertragen sich alle Methoden , eine Darstellung der $f \in M$ mit $\mathrm{Re}f(0) = -1$ und f extrem zu finden, auch auf $f\equiv-1$.
Da nun die Gleichungen (i) und (ii) im Beweis eine tragende Rolle haben, lassen sich diese nicht mehr anwenden.
Deshalb mußte man die Automorphismen A_y zur Beweisführung hinzuziehen.

4.4. <u>Satz:</u> Die in 4.3. angegebenen Funktionen

(i) $f_0^j := 1_{e_j}$ mit $j \in \{1,\dots,m\}$ und

(ii) $f_{z,\beta} := \dfrac{e^{i\beta}\exp_z - 1 - ie^{-\langle z,\vec{1}\rangle}\sin\beta}{1 - e^{-\langle z,\vec{1}\rangle}\cos\beta}$ mit $z \in R_+^m - \{0\}$ und

$\beta \in \Pi := (-\pi,\pi]$

sind die Extrempunkte von M .

<u>Beweis:</u> 1. Zuerst werden wir zeigen, daß alle $f_{z,0}$ und f_0^j für alle $z \in R_+^m - \{0\}$ und $j=1,\dots,m$ extrem in M liegen.

Dazu brauchen wir noch folgende Zwischenbehauptung:

Ist $f(0) = 0$ und f dissipativ, so ist f fast positiv definit.

Beweis der Zwischenbehauptung:

Seien $c_j \in \mathbb{R}$ und $x_j \in R_+^m$ für $j=1,\dots,n$ mit $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j = 0$, so

ist $v := \sum\limits_{k,l=1}^{n} c_k c_l \exp_{(x_k+x_l)} \in \ominus$ mit $v(0) = 0$ und $v \geq 0$.

Somit ist $\|v\|_\infty - v \in T$.

Damit gilt: $-\mathrm{Re}\sum\limits_{k,l=1}^{n} c_k c_l f(x_k+x_l) = -\sum\limits_{k,l=1}^{n} c_k c_l f(x_k+x_l) \leq 0,$

weil nach 2.14.(ii) mit $f(0)=0$ $\mathrm{Im}f=0$ identisch ist.

Also ist ein solche f fast positiv definit.

Sei nun $f = f_0^j$ oder $f = f_{z,0}$ für ein $j \in \{1,\dots,m\}$ oder $z \in R_+^m - \{0\}$.

Nehmen wir nun an, es gibt ein $\mu \in (0,1)$ und $g,h \in M$ mit $\mu g + (1-\mu)h = f$, so ist $g(0)=h(0)=f(0)=0$ (wegen 2.7.(iii)).

Wegen der Zwischenbehauptung sind $f,g,h \in K$ (siehe 1.8.(iii)).

Nach 1.11. liegt aber f selbst extrem in K, wonach aus einer solchen Konvexlineardarstellung von $f = \mu g + (1-\mu)h$ folgt, daß $f=g=h$ ist.

Das heißt, daß $f_{z,0}$ und f_0^j für $j=1,\dots,m$ und $z \in R_+^m - \{0\}$ extrem in M liegen.

2. Jetzt werden wir die Extremität von $f_{z,\beta}$ zeigen für alle $z \in \mathbb{R}^m_+ - \{0\}$ und $\beta \in \Pi - \{0\}$.
Seien dafür im folgenden $z \in \mathbb{R}^m_+ - \{0\}$ und $\beta \in \Pi - \{0\}$ beliebig, aber fest.
Nehmen wir nun an, es gibt ein $\mu \in (0,1)$ und $g_1, g_2 \in M$ mit $\mu g_1 + (1-\mu) g_2 = f_{z,\beta}$.
Setzen wir der Kürze halber $g_3 := f_{z,\beta}$.
Es ist zu zeigen, daß $g_1 = g_2 = g_3$ ist.
Wir versuchen dies dadurch zu erreichen, daß wir diese Funktionen gemäß 2.16. so " drehen ", daß sich der erste Teil dieses Beweises anwenden läßt (siehe 2.a.). So bekommen wir eine Darstellung dieser g_1 und g_2, die letztlich nur noch von deren Werten in 0 abhängt (siehe 2.b.). Mit den bis dahin erarbeiteten Gleichungen (1) bis (7) folgert man schließlich, daß $g_1 = g_2 = g_3$ ist.
Aus der Konvexlineardarstellung von g_3 folgt schon mal wegen 2.7.(iii) und 2.14.(i), daß g_1 und g_2 beschränkt sind.
Setzen wir nun gemäß 2.16. für $j=1,2,3$ und für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$:

$C_{j,y} := e^{-i\beta}(g_j - (g_j)_y) + a_{j,y}\operatorname{Re} f(y) \in Q$ und

$D_{j,y} := (g_j)_y - a_{j,y}\operatorname{Re} f(y) \in Q$, wobei $a_{j,y} \in [0,1]$ ist.

Damit gilt für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$:

$\mu C_{1,y} + (1-\mu) C_{2,y} = e^{-i\beta}(g_3 - (g_3)_y) + c_y \in Q$ und

$\mu D_{1,y} + (1-\mu) D_{2,y} = (g_3)_y - c_y \in Q$, wobei

$c_y := \operatorname{Re}(\mu a_{1,y} g_1(y) + (1-\mu) a_{2,y} g_2(y))$ ist.

Wir zeigen zuerst einmal, daß $c_y = \operatorname{Re} g_3(y) \dfrac{1 - e^{-\langle y,z\rangle}}{1 - e^{-\langle y,z\rangle}\cos\beta}$

$=- \dfrac{1 - e^{-\langle y,z\rangle}}{1 - e^{-\langle \vec{1},z\rangle}\cos\beta}$ ist.

Es gilt zunächst einmal, daß $e^{-i\beta}(g_3 - (g_3)_y) + c_y \in Q$ ist.

Also ist nach 2.7.(iii) $\mathrm{Re}(e^{-i\beta}(g_3(0)-g_3(y))) + c_y \leq 0$,

womit $c_y \leq \mathrm{Re}(e^{-i\beta}(g_3(y) - g_3(0))) = \dfrac{e^{-\langle y,z\rangle} - 1}{1 - e^{-\langle \vec{1},z\rangle}\cos\beta}$ ist.

Andererseits ist $(g_3)_y - c_y \in Q$.

Nun gibt es nach 2.19. eine Folge $(t_n)_{n\in \mathbb{N}} \subset T$, die gegen ein stetiges t konvergiert, für welche $t(0) = \|t\|_\infty = 1$ und $t(z) = e^{-i\beta}$ ist. Sei nun $t_n := \sum_{j=1}^{r_n} c_{n,j}\exp_{x_{n,j}}$, so muß

$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{r_n} c_{n,j} g_3(y+x_{n,j}) - t_n(0)c_y \leq 0$ sein für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da nun $(g_3)_y = \dfrac{e^{i\beta}\exp_z \cdot e^{-\langle y,z\rangle} - 1 - ie^{-\langle \vec{1},z\rangle}\sin\beta}{1 - e^{-\langle \vec{1},z\rangle}\cos\beta}$ ist, folgt

daher für n gegen ∞ :

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{i\beta}e^{-i\beta}e^{-\langle y,z\rangle} - 1 - ie^{-\langle \vec{1},z\rangle}\sin\beta}{1 - e^{-\langle \vec{1},z\rangle}\cos\beta} - c_y \right) \leq 0$, woraus

folgt, daß $c_y \leq \dfrac{e^{-\langle y,z\rangle} - 1}{1 - e^{-\langle \vec{1},z\rangle}\cos\beta}$ ist.

Zusammen folgt also für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$:

$$c_y = \frac{e^{-\langle y,z\rangle} - 1}{1-e^{-\langle \vec{1},z\rangle}\cos\beta} = \mathrm{Re}\, g_3(y)\, \frac{1 - e^{-\langle y,z\rangle}}{1-e^{-\langle \vec{1},z\rangle}\cos\beta} .$$

Damit ist c_y eindeutig festgelegt, woraus für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ aus dem Vorangegangenem folgt:

(1) $\mu C_{1,y} + (1-\mu)C_{2,y} = C_{3,y}$ und $\mu D_{1,y} + (1-\mu)D_{2,y} = D_{3,y}$.

Weiterhin gilt mit dem oben Errechneten für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$:

(2) $C_{3,y} = \dfrac{(1-e^{-\langle y,z\rangle})(\exp_z - 1)}{1-e^{-\langle \vec{1},z\rangle}\cos\beta}$ und

(3) $D_{3,y} = \dfrac{e^{-\langle y,z\rangle}(e^{i\beta}\exp_z - 1) - ie^{-\langle \vec{1},z\rangle}\sin\beta}{1 - e^{-\langle \vec{1},z\rangle}\cos\beta}$.

Aus der Gleichung (1) und (2) folgt zusammen mit 2.7.(iii), daß $\mathrm{Re}C_{1,y}(0) = \mathrm{Re}C_{2,y}(0) = \mathrm{Re}C_{3,y}(0) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ ist.

Also ist für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ (und $j=1,2,3$)

(4) $\operatorname{Re}(e^{i\beta}(g_j(0)-g_j(y))) = - a_{j,y}\operatorname{Re}g_j(y)$.

Weiterhin folgt nach 2.14.(ii), daß für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ $\operatorname{Im}C_{j,y}$ konstant ist , was heißt, daß (für $j=1,2,3$)

$\operatorname{Im}(e^{-i\beta}(g_j-(g_j)_y)) = \operatorname{Im}(e^{-i\beta}(g_j(0)-g_j(y)))$ ist.

Setzt man darin nun $x \in \mathbb{R}_+^m$ ein, so folgt für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$:

$\operatorname{Im}(e^{-i\beta}(g_j(x)-g_j(x+y)+g_j(y)-g_j(0))) = 0$.

Damit muß $\operatorname{Im}(e^{-i\beta}(g_j-g_j(0)))$ linear sein.

Da g_j beschränkt ist, wird es verschwinden müssen.

Also ist für $j = 1,2,3$ $\operatorname{Im}(e^{-i\beta}g_j)=\operatorname{Im}(e^{-i\beta}g_j(0))=\operatorname{Im}(e^{-i\beta}g_j(\hat{1}))$

$= \sin\beta$ (- weil ja $g_j \in M$ ist).

Damit gilt für $j = 1,2,3$:

(5) $\operatorname{Im}g_j\cdot\cos\beta - \operatorname{Re}g_j\cdot\sin\beta = \sin\beta$.

2.a.

Nach (2) gilt nun : $\operatorname{Re}C_{3,y} = \dfrac{1 - e^{-\langle y,z\rangle}}{1-e^{-\langle \hat{1},z\rangle}\cos\beta} f_{z,0}$, welches nach dem ersten Teil des Beweises in M - und damit in P - extrem liegt.

Damit gibt es für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ ein $\mu_{j,y} \geq 0$ mit

$\mu_{j,y}\cdot f_{z,0} = \operatorname{Re}C_{j,y}$ (für $j = 1,2,3$) .

Nach (4) und (5) ist für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}C_{j,y} &= \operatorname{Re}(e^{-i\beta}(g_j-(g_j)_y)+a_{j,y}\operatorname{Re}(g_j(y)) \\ &= e^{-i\beta}(g_j-(g_j)_y+g_j(y)-g_j(0)) \quad \text{(für } j=1,2,3 \text{)} .\end{aligned}$$

Damit folgt für $j=1,2,3$ und alle $y \in \mathbb{R}_+^m$:

$$\begin{aligned}(*) \quad g_j &= (g_j)_y+g_j(0)-g_j(y)+e^{i\beta}\mu_{j,y}f_{z,0} \\ &= D_{j,y}+g_j(0)-(1-a_{j,y})g_j(y) + \mu_{j,y}\frac{(\exp_z-1)e^{i\beta}}{1 - e^{-\langle \hat{1},z\rangle}} .\end{aligned}$$

Nun gibt es nach 2.19. eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, die gleichmäßig gegen ein stetiges t konvergiert, für welches $t(0) = \|t\|_\infty$

und $t(z)=e^{-i\beta}t(0)$ ist. Sei dabei der Kürze wegen $t(0) = 1$.

Sei nun $t_n := \sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}\exp_{x_{n,k}}$, so muß wegen der Dissipativität von $D_{j,y}$ und g_j $\quad \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}D_{j,y}(x_{n,k}) \leq 0$ und

$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}g_j(x_{n,k}) \leq 0$ sein für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ und $j=1,2,3$.

Nun gilt aber, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{R}_+^m$

$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}g_3(x_{n,k}) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{i\beta}t_n(z) - t_n(0)}{1 - e^{-\langle\widetilde{1},z\rangle}\cos\beta}\right)$ und wegen (3)

$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}D_{3,y}(x_{n,k}) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{-\langle y,z\rangle}(e^{i\beta}t_n(z)-t_n(0))}{1 - e^{-\langle\widetilde{1},z\rangle}\cos\beta}\right)$ ist,

folgt, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}g_3(x_{n,k}) = 0$ und

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}D_{3,y}(x_{n,k}) = 0$ ist.

Aus $\mu g_1+(1-\mu)g_2=g_3$ und (1) folgt damit auch für $j=1,2$, daß

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}g_j(x_{n,k}) = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}D_{j,y}(x_{n,k}) = 0$

ist.

Wendet man diese Überlegungen auch auf die Gleichung (*) an, so folgt, daß

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}(D_{j,y}(x_{n,k})+\mathrm{Re}g_j(0)-(1-a_{j,y})\mathrm{Re}g_j(y)\ ) \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}\left(\mu_{j,y}\frac{(e^{-\langle x_{n,k},z\rangle}-1)e^{i\beta}}{1 - e^{-\langle\widetilde{1},z\rangle}}\right) \\
&= \mathrm{Re}g_j(0)-(1-a_{j,y})\mathrm{Re}g_j(y)+\mu_{j,y}\frac{1 - \cos\beta}{1 - e^{-\langle\widetilde{1},z\rangle}} \quad .
\end{aligned}$$

Also folgert man für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ und $j = 1,2,3$:

$\mu_{j,y}\dfrac{1 - \cos\beta}{1 - e^{-\langle\widetilde{1},z\rangle}} = (1-a_{j,y})\mathrm{Re}g_j(y)-\mathrm{Re}g_j(0)$, woraus

wegen $\beta \neq 0$ folgt, daß für alle $y \in \mathbb{R}_+^m$ und $j=1,2,3$

$\mu_{j,y}= \dfrac{((1-a_{j,y})\mathrm{Re}g_j(y)-\mathrm{Re}g_j(0))(1-e^{-\langle\widetilde{1},z\rangle})}{1 - \cos\beta}$ ist.

Mit der Gleichung (*) heißt das für alle $y \in R^m_+$:

$$g_j-(g_j)_y+g_j(y)-g_j(0) = ((1-a_{j,y})\mathrm{Re}g_j(y)-\mathrm{Re}g_j(0))\frac{e^{i\beta}(\exp_z-1)}{1-\cos\beta}.$$

Mit der Gleichung (4) und (5) folgt:

$$g_j-(g_j)_y+g_j(y)-g_j(0)$$
$$= (\mathrm{Re}g_j(y)-\mathrm{Re}g_j(0)-e^{-i\beta}(g_j(y)-g_j(0)))\ \frac{e^{i\beta}(\exp_z-1)}{1-\cos\beta}\ .$$

Setzt man darin nun $x \in R^m_+$ und für y $\vec{1}$ ein, so gilt für $j=1,2,3$:

$$g_j(x+\vec{1})+g_j(0)-g_j(x)-g_j(\vec{1}) =$$
$$= \frac{\mathrm{Re}(g_j(0)+1)-e^{-i\beta}(g_j(0)+1)}{1-\cos\beta}\,(1-e^{-\langle x,z\rangle})e^{i\beta}.$$

Setzt man andererseits $\vec{1}$ und für y ein $x \in R^m_+$ ein, so folgt für $j=1,2,3$:

$$g_j(x+\vec{1})+g_j(0)-g_j(x)-g_j(\vec{1}) =$$
$$= \frac{\mathrm{Re}(g_j(0)-g_j(x))-e^{-i\beta}(g_j(0)-g_j(x))}{1-\cos\beta}(1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle})e^{i\beta}\ .$$

Zusammen gilt für alle $x \in R^m_+$ und $j = 1,2,3$:

$$(\mathrm{Re}(g_j(0)-g_j(x))-e^{-i\beta}(g_j(0)-g_j(x))\ )e^{i\beta}(e^{-\langle\vec{1},z\rangle}-1)$$
$$= (\mathrm{Re}(g_j(0)+1)+e^{-i\beta}(g_j(0)+1)\ )e^{i\beta}(e^{-\langle x,z\rangle}-1)\ ,$$ woraus folgt:

$$(6)\quad \mathrm{Re}(g_j(0)-g_j(x))e^{-i\beta}(e^{-\langle\vec{1},z\rangle}-1) - (g_j(0)-g_j(x))(e^{-\langle\vec{1},z\rangle}-1)$$
$$= \mathrm{Re}(g_j(0)+1)e^{i\beta}(e^{-\langle x,z\rangle}-1) - (g_j(0)+1)(e^{-\langle x,z\rangle}-1)$$

für alle $x \in R^m_+$ und für $j=1,2,3$.

Für den Realteil heißt das für alle $x \in R^m_+$ und $j=1,2,3$:

$$(\cos\beta - 1)(\mathrm{Re}g_j(0)-\mathrm{Re}g_j(x))(e^{-\langle\vec{1},z\rangle}-1)$$
$$= (\cos\beta - 1)(\mathrm{Re}g_j(0)+1)(e^{-\langle x,z\rangle}- 1)\quad .$$

Schließlich liefert dieses zusammen mit (6) für $j=1,2,3$:

$$(\ g_j(0)-\ g_j\ )(e^{-\langle\vec{1},z\rangle}-1) = (g_j(0)\ +\ 1)(\exp_z\ -\ 1),$$ woraus

$$(7)\quad \frac{\exp_z - 1}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}}(g_j(0)\ +\ 1)\ +\ g_j(0) = g_j$$ folgt .

2.b.

Bemüht man nun wieder die Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, die gegen ein stetiges t gleichmäßig konvergiert, für das $t(0) = \|t\|_\infty = 1$ und $t(z) = e^{-i\beta}$ ist, so folgt, wie wir es schon einmal in diesem Beweis gesehen hatten, daß mit $t_n = \sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k} \exp_{x_{n,k}}$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k} g_j(x_{n,k}) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{-i\beta} - 1}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}}(g_j(0)+1)+g_j(0)\right) = 0$$

ist für $j = 1,2,3$.

Es folgt damit, daß für $j=1,2,3$

$$\operatorname{Im} g_j(0)\sin\beta + (\cos\beta-1)(\operatorname{Re} g_j(0)+1) + (1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle})\operatorname{Re} g_j(0) = 0$$

ist und daraus :

$$\operatorname{Im} g_j(0)\sin\beta + (\cos\beta - e^{-\langle\vec{1},z\rangle})\operatorname{Re} g_j(0) = 1 - \cos\beta .$$

Zusammen mit der Gleichung (5) liefert das ein Gleichungssystem ; deren einzige Lösung ist für $j=1,2,3$:

$$\operatorname{Im} g_j(0) = \frac{(1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle})\sin\beta}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta} \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} g_j(0) = \frac{\cos\beta - 1}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta} .$$

Mit der Gleichung (7) folgt dann, daß für $j=1,2$

$$g_j = \frac{e^{i\beta}\exp_z - 1 - ie^{-\langle\vec{1},z\rangle}\sin\beta}{1 - e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta} = g_3 = f_{z,\beta} \text{ ist.}$$

Damit wäre letztenendes auch bewiesen, daß $f_{z,\beta}$ extrem in M liegt für $z \in \mathbb{R}^m_+ - \{0\}$ und $\beta \in \Pi$.

Zusammen mit dem Satz 4.3. folgt daraus die Behauptung.

$\square$

Zum Ende dieses Paragraphen wollen wir noch eine Abschätzung für alle $f \in M$ liefern :

4.5. <u>Lemma:</u> Ist $f \in M$, so ist $|f(x)| \leq 2(3+|x|) =: s(x)$ für alle $x \in R_+^m$.

<u>Beweis:</u> Sei $m(x) := \max \{ |x_j| \mid j=1,\dots,m \}$ für $x \in R_+^m$ und $W := \{ x \in R_+^m \mid m(x) \leq 1 \}$.

Für alle $x \in R_+^m$ gibt es ein $\hat{x} \in W$ mit $([m(x)]+1)\hat{x} = x$ (dabei bezeichne $[\ ]$ die Gauß- Klammern).

Andererseits gibt es für alle $y \in W$ ein $\bar{y} \in R_+^m$ mit $y+\bar{y} = \vec{1}$, wofür mit 2.13.(ii) $\operatorname{Ref}(\hat{1}) = \operatorname{Ref}(y+\bar{y}) \leq \frac{1}{2}\operatorname{Ref}(y)$ und schließlich $-2 \leq \operatorname{Ref}(y) \leq 0$ ist.

Nun gilt nach 2.9.(ii) die folgende Abschätzung für $x \in R_+^m$:

$$|f(0) - f(x)| = |f(0)-f([m(x)]\hat{x}+\hat{x})| = \left| \sum_{k=0}^{[m(x)]} (f(k\hat{x})-f((k+1)\hat{x})) \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{[m(x)]} |f(k\hat{x})-f((k+1)\hat{x})|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{[m(x)]} -\operatorname{Ref}(\hat{x})$$

$$\leq ([m(x)]+1)\cdot 2$$

$$\leq (|x|+1)\cdot 2 .$$

Weil nun $|f(0)+1| \leq 1$ ist, folgt damit, daß $|f(0)| \leq 2$ ist, und somit gilt $|f(x)| \leq 2(3+|x|) = s(x)$ für alle $x \in R_+^m$. □

<u>Bemerkungen zum Paragraphen 4 :</u>

Dieser Paragraph stellt in dieser Arbeit das Kernstück.

Die Sätze 4.3. und 4.4. liefern die eigentliche Grundlage für das Theorem 6.9.

Die Wahl der Basis M in der Definition 4.1. ist - wie im Paragraphen 1 - durch die Umgänglichkeit des Kriteriums "$f(\hat{1})=-1$" bestimmt (vgl. die Bemerkungen zum Paragraphen 1) .

§ 5 Die schwach - * - Topologie

In den bisherigen Paragraphen haben wir eine Darstellung der Extrempunkte der Basen K und M bekommen. Können wir jetzt zeigen, daß diese Mengen kompakt und metrisierbar sind, so können wir mit dem Satz von Choquet (für den metrisierbaren Fall) eine Integraldarstellung der Funktionen aus F und Q erarbeiten. Dazu bedarf es einer Topologie, die die Kompaktheit und Metrisierbarkeit von K und M liefert. (Daß dies natürlich nicht durch die Topologie der gleichmäßigen oder punktweisen Konvergenz gewährleistet ist, läßt sich leicht daraus folgern, daß $\frac{\exp z - 1}{1-e^{-\langle 1, z\rangle}}$ für z gegen ∞ nicht gleichmäßig konvergiert, beziehungsweise daß der punktweise Limes nicht stetig ist, obwohl diese Funktionen in K und M liegen.) Zur Erarbeitung einer geeigneten Topologie soll dieser Paragraph dienen:

5.1. <u>Definition:</u> (i) Sei $I \subset \mathbb{R}_+^m$ kompakt.

$L^1(I) := \{ f \in L^1 \mid \text{Träger} f \subseteq I$ bis auf eine Lebesgue-Nullmenge$\}$ sei normiert durch $\| \|_1$. Das System der Kompakta in $\mathbb{R}_+^m$ ist geordnet bezüglich " $\subseteq$ " .

Sei $L^1_* := \lim\limits_{\substack{I \subset \mathbb{R}_+^m \\ I \text{ kompakt}}} \text{ind} \; (L^1(I), \| \|_1)$ definiert, also der induktive , lokalkonvexe Limes der Räume $(L^1(I), \| \|_1)$.

(ii) Sei $I \subset \mathbb{R}_+^m$ kompakt.

$L^\infty(I)$ sei der Banach- Raum der Äquivalenzklassen komplexwertiger wesentlich beschränkter Funktionen auf I mit der Norm $\| \|_\infty \big|_I$.

Sei $L^\infty_{loc} := \lim\limits_{\substack{I \subset \mathbb{R}_+^m \\ I \text{ kompakt}}} \text{proj} (L^\infty(I), \| \|_\infty \big|_I)$ definiert, also der projektive, lokalkonvexe Limes der Räume $(L^\infty(I), \| \|_\infty \big|_I)$.

5.1'. <u>Bemerkung:</u> (i) $L^{\infty}_{loc} = (L^1_*)'$.

(ii) L^{∞}_{loc} ist der Vektorraum aller Äquivalenzklassen von komplexwertigen meßbaren, auf allen Kompakta in $\mathbb{R}^m_+$ wesentlich beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}^m_+$.

<u>Beweis:</u> (i): Es ist $L^{\infty}(I) = (L^1(I))'$ für alle kompakten $I \subset \mathbb{R}^m_+$. Nun besagt ein Satz über die Topologie von lokalkonvexen Räumen, daß das duale Spektrum eines induktiven (lokalkonvexen) Limes über seinen projektiven (lokalkonv.) Limes den Dualraum des induktiven (lokalkonv.) Limes erzeugt. (Siehe dazu [8] § 26 Satz 1.2 .) Also ist $L^{\infty}_{loc} = (L^1_*)'$.

(ii): Eine komplexwertige meßbare, auf allen Kompakta in $\mathbb{R}^m_+$ wesentlich beschränkte Funktion f definiert durch

$g \longmapsto \langle f,g\rangle := \int_{\mathbb{R}^m_+} f(x)g(x)dx$ ein lineares stetiges Funktional

auf L^1_* . Ist nun $\tilde{f} \in L^{\infty}_{loc}$, so ist für alle Kompakta $I \subset \mathbb{R}^m_+$: $\tilde{f}|_{L^1(I)}$ stetig. Somit gibt es ein $f_I \in L^{\infty}(I)$ mit $\langle\tilde{f},h\rangle = \int_I f_I(x)h(x)dx$ für alle $h \in L^1(I)$. Und es gilt für alle Kompakta $I,J \subset \mathbb{R}^m_+$: $f_I|_{(I\cap J)} = f_J|_{(I\cap J)}$ fast überall. Wegen der Caratheodory - Vervollständigung der σ-Algebra der Borelmengen auf $\mathbb{R}^m_+$ gibt es eine Funktion f auf $\mathbb{R}^m_+$, die komplexwertig, meßbar und wesentlich beschränkt ist auf allen Kompakta in $\mathbb{R}^m_+$, so, daß für alle Kompakta $I \subset \mathbb{R}^m_+$ $f|_I = f_I$ fast überall ist.

Daher muß $\tilde{f} = f$ fast überall sein.

(Siehe dazu auch [5] Lemma 3.11.) □

5.2. <u>Bemerkung:</u> Sei $s(x) := 2(3 + |x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m_+$.

$V := \left\{ g \in L^1_* \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^m_+} |g(x)|\, s(x)dx \leq 1 \right\}$ ist eine 0-Umgebung in L^1 bzgl. der schwachen Topologie.

Beweis: Nach 5.1' ist $s \in L^{\infty}_{loc}$, woraus die Behauptung folgt.

5.3. Bemerkung: $(L^{\infty}_{loc}, \sigma(L^{\infty}_{loc}, L^{1}_{*}))$ ist ein separierter, lokal-konvexer Vektorraum.

5.4. Lemma: Sei $\mathfrak{M} := \{ f \in L^{\infty}_{loc} \mid \forall g \in V: |\int_{R^n_+} f(x)g(x)dx| \leq 1 \}$.
$\mathfrak{M}$ ist $\sigma(L^{\infty}_{loc}, L^{1}_{*})$ - kompakt und - metrisierbar.

Beweis: 1. Nach dem Satz von Banach - Alaoglu ist
$\sigma((L^1_*, \sigma(L^1_*, L^{\infty}_{loc}))', L^1_*)$ - kompakt wegen 5.2. .
Da nach einem Satz der Funktionalanalysis für einen topol. Vektorraum X und dem separierten Vektorraum X' der darauf stetigen linearen Funktionale, daß die von X' und seiner Topologie τ' auf X erzeugte Topologie σ einen topol. Vektorraum (X, σ) erzeugt, dessen Dual wieder identisch ist mit X' .
Für unseren Fall gilt nun: Das Dual von $(L^1_*, \sigma(L^1_*, L^{\infty}_{loc}))$ ist identisch mit L^{∞}_{loc} . Also gilt $\mathfrak{M}$ L^{∞}_{loc} ist $\sigma(L^{\infty}_{loc}, L^1_*)$-kompakt.
2. Die $\sigma(L^{\infty}_{loc}, L^1_*)$ - Metrisierbarkeit folgt aus der Abzählkeit des L^1_* definierenden induktiven Spektrums $(L^1(I_n))_{n \in N}$ mit $I_n := \{ x \in R^n_+ \mid |x| \leq n \}$ und der Separabilität der $L^1(I_n)$, da in separablen topologischen Vektorräumen schwach - * - kompakte Teilmengen des Dualraums schwach - * - metrisierbar sind. (Siehe dazu auch W. Rudin: "Functional-Analysis" N.Y. 1973 - Theorem 3.15 ,3.1o und 3.16 .) □

Bemerkungen zum Paragraphen 5 :

Wie schon zuanfang dieses Paragraphen bemerkt, benötigen wir diese topologischen Hilfsmittel zur Erarbeitung einer Topologie, in der K und M kompakt und metrisierbar sind.
Die Wahl dieser Topologie und einige der Aussagen darüber sind stark beeinflußt durch die Lektüre von [5] von N. Drumm .

So stammen wesentliche Teile des Beweises von 5.1'. aus einer Aufbereitung des Lemmas 3.1.1 aus [5] für unsere Ansprüche. Die Menge $\mathfrak{M}$ aus 5.4. dient im Paragraphen 6 zur Einbettung von H und K .

§ 6 Die Integraldarstellung von Elementen aus F und Q

Mit den im Paragraphen 5 erarbeiteten Mitteln lassen sich jetzt M und K topologisieren, und es läßt sich zeigen, daß diese Mengen schwach - $*$ - kompakt und - metrisierbar sind. Im ersten Teil dieses Paragraphen beschäftigen wir uns mit M , im zweiten dann mit K .

6.1. <u>Definition:</u> $f \in L^\infty_{loc}$ heißt <u>integral dissipativ</u>, wenn für alle $h \in L^1_*$ mit $\|\mathscr{L}(h)\|_\infty = \mathscr{L}(h)(0)$ gilt, daß $\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m_+} h(x)f(x)dx \leq 0$ ist.

(Diese Definition hängt offensichtlich nur von den Klassen ab.)

6.2. <u>Definition:</u> (i) $* : L^1_* \times L^1_* \longrightarrow L^\infty_{loc}$, $(v*w)(x) := \int_{\mathbb{R}^m_+} \mathring{w}(x-y)v(y)dy$.

(Dabei sei $\mathring{w}: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{C}$ durch $\mathring{w}\big|_{\mathbb{R}^m_+} := w$ und $\mathring{w}\big|_{(\mathbb{R}^m - \mathbb{R}^m_+)} := 0$ definiert.)

(ii) $\circ : L^\infty_{loc} \times L^1_* \longrightarrow L^\infty_{loc}$, $(f\circ v)(x) := \int_{\mathbb{R}^m_+} f(x+y)v(y)dy$.

6.3. <u>Bemerkung:</u> (i) $v,w \in L^1_* \Rightarrow v*w \in L^1_*$.

(ii) $\mathscr{L}(v*w) = \mathscr{L}(v)\mathscr{L}(w)$ für alle $v,w \in L^1_*$.

<u>Beweis:</u> (i): Es ist leicht zu sehen, daß $\text{Träger}(v*w) \subseteq \{x+y \,\|\, x \in \text{Träger}(v),\ y \in \text{Träger}(w)\}$ und damit kompakt ist.

(ii) Es gilt für alle $v,w \in L^1_*$ und $z \in \mathbb{R}^m_+$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(v*w)(z) &= \int_{\mathbb{R}^m_+}\int_{\mathbb{R}^m_+} \mathring{w}(x-y)v(y)e^{-\langle x,z\rangle}dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m_+}\int_{\mathbb{R}^m_+} e^{-\langle(\xi+y),z\rangle}w(\xi)v(y)dyd \\ &= \mathscr{L}(v)(z)\mathscr{L}(w)(z) .\end{aligned}$$

(Dabei ist zu beachten, daß mit der Transformation $\xi := x-y$ der Integrationsbereich wegen des Übergangs von $\mathring{w}$ zu w nicht verschoben werden mußte !) $\square$

6.4. <u>Lemma:</u> Ist $f: \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist f genau dann dissipativ, wenn f integral dissipativ ist.

<u>Beweis:</u> 1. Sei $f \in Q$, also dissipativ und stetig.

Wir zeigen, daß f integral dissipativ ist.

Sei $h \in L^1_*$ mit $\mathcal{L}(h)(0) = \|\mathcal{L}(h)\|_\infty$.

Sei $I \subset \mathbb{R}^m_+$ ein Kompaktum mit Träger$(h) \subset I$.

Ist $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{N}^m$ ($n = (n_1,\dots,n_m)$), so definieren wir dazu $U^n_\delta := \{x \in \mathbb{R}^m_+ \,\|\, \forall i=1,\dots,m : \delta n_i \leq |x_i| \leq \delta(n_i+1)\}$.

Diese $(U^n_\delta)_{n \in \mathbb{N}^m}$ sind bis auf Lebesgue- Nullmengen paarweise disjunkt, und es ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^m} U^n_\delta = \mathbb{R}^m_+$ für alle $\delta > 0$.

Da I kompakt ist, gibt es für alle $\delta > 0$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{F}_\delta \subset \mathbb{N}^m$ mit $\bigcup_{n \in \mathcal{F}_\delta} U^n_\delta \supset I$.

Da f stetig ist, wählt man nun für ein $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $x,y \in U^n_\delta$ $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ ist.

Weiterhin gilt nun für $y \in \mathbb{R}^m_+$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(h)(y) &= \sum_{n\in \mathcal{F}_\delta} \int_{U^n_\delta} h(s)e^{-\langle s,y\rangle} ds \\
&= \sum_{n\in \mathcal{F}_\delta} \int_{U^0_\delta} h(s+\delta n)e^{-\langle(\delta\cdot n+s),y\rangle} ds \\
&= \int_{U^0_\delta} \Big(\sum_{n\in \mathcal{F}_\delta} h(s+\delta n)e^{-\langle\delta(n+\vec{1}),y\rangle} e^{-\langle(s-\delta\vec{1}),y\rangle}\Big)\, ds \\
&= \int_{U^0_\delta} e^{\langle(\delta\vec{1}-s),y\rangle}\Big(\sum_{n\in \mathcal{F}_\delta} h(s+n)e^{-\langle\delta(n+\vec{1}),y\rangle}\Big)\, ds \quad .
\end{aligned}$$

Da nun $s \longmapsto e^{\langle(\delta\vec{1}-s),y\rangle}$ stetig ist auf U^0_δ, gibt es für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$ ein $s_y \in U^0_\delta$ mit

$$\mathcal{L}(h)(y) = e^{\langle(\delta\vec{1}-s_y),y\rangle} \int_{U^0_\delta} \sum_{n\in \mathcal{F}_\delta} h(s+\delta n)e^{-\langle\delta(n+\vec{1}),y\rangle} ds.$$

Wir setzen nun $t_\delta := \sum_{n\in \mathcal{F}_\delta} \exp \delta(n+\vec{1}) \int_{U^0_\delta} h(x)dx$.

Damit gilt: $\mathcal{L}(h)(y) = e^{\langle(\delta\vec{1}-s_y),y\rangle}\, t_\delta\,(y)$ für $y \in \mathbb{R}^m_+$.

Da nun für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$ $e^{-\langle(\delta\vec{1}-s_y),y\rangle} \in (0,1]$ ist, folgt:

$|\mathcal{L}(h)(y)| \geq |t_\delta(y)|$ für alle $y \in \mathbb{R}^m_+$, und damit gilt:

$\|t_\delta\|_\infty \leq \|\mathcal{L}(h)\|_\infty = \mathcal{L}(h)(0) = t_\delta(0)$; also ist $t \in T$.

Damit gilt für f :

$$\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^m_+} f(x)h(x)dx = \operatorname{Re}\sum_{n\in \mathcal{I}_\delta}\int_{U^n_\delta} h(x)f(x)dx$$

$$= \operatorname{Re}\sum_{n\in\mathcal{I}_\delta}(f(\delta(n+\vec{1})))\int_{U^n_\delta}h(x)dx + \operatorname{Re}\sum_{n\in\mathcal{I}_\delta}\int_{U^n_\delta}(f(x)-f(\delta(n+\vec{1})))h(x)dx.$$

Für die erste Summe des letzten Gleichungsteils gilt, daß sie ≤ 0 ist, für die zweite, daß sie $\leq \varepsilon\|h\|_1 =: \varepsilon'$ ist.

Also gilt, daß $\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^m_+} f(x)h(x)dx \leq 0+\varepsilon'$ ist.

Da mit ε auch ε' beliebig gewählt werden kann, folgt, daß f auch integral dissipativ ist.

2. Sei f integral dissipativ und stetig. Wir zeigen, daß f dissipativ ist:

Sei $t \in T$ mit $t = \sum_{j=1}^n c_j \exp_{x_j}$.

Für $s > 0$ sei $U_s := \mathbb{R}^m_+ \cap (s\cdot\vec{1} - \mathbb{R}^m_+)$.

Für ein $A \in \mathbb{R}^m_+$ sei 1_A die Indikatorfunktion von A.

Damit definieren wir $h_s := \sum_{j=1}^n c_j (\frac{1}{s})^m 1_{(U_s+x_j)}$, so ist

$h_s \in L^1_*$. Es ist $h_s dx = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_j} * ((\frac{1}{s})^m 1_{U_s} dx) =: \mu$

(-im maßtheoretischen Sinne , wobei δ_x das Dirac-Maß in x sein soll). Also ist $\mathcal{L}(\mu) = \mathcal{L}(h_s) = \|t\|_\infty((\frac{1}{s})^m 1_{U_s}dx)$.

Nun ist $((\frac{1}{s})^m 1_{U_s}dx)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dessen Laplacetransformierte in 0 den Wert 1 annimmt. Daher gilt mit $t \in T$ auch, daß $\|\mathcal{L}(h_s)\|_\infty = \mathcal{L}(h_s)(0)$ ist.

Damit folgt für alle $s > 0$:

$$0 \geq \operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^m_+} h_s(x)f(x)dx = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^n c_j(\tfrac{1}{s})^m\int_{U_s} f(x+x_j)dx \quad .$$

Da f stetig ist, gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $s > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta$ $|f(x_j)-f(x)| < \varepsilon$ ist für $j=1,\dots,n$, woraus mit der letzten Ungleichung die Dissipativität von f folgt. $\square$

6.5. <u>Lemma:</u> Ist $f \in L^\infty_{loc}$ integral dissipativ, so ist für alle $v \in L^1_*$ mit $v \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^m_+} v(x)dx = 1$ die Funktion $f - f \circ v$ integral vollständig dissipativ .

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zuerst, daß $f - f \circ v$ der Definition 3.5. genügt und hernach , daß $f - f \circ v \in L^\infty$ ist.

1. Sei $h \in L^1_*$, so setze ich für $\beta \in (-\pi,\pi]$

$g_\beta := e^{i\beta}(h-h*v) + v\,\|\mathcal{L}(h)\|_\infty \in L^1_*$. Daher ist

$\mathcal{L}(g_\beta) = e^{i\beta}(1-\mathcal{L}(v))\mathcal{L}(h) + \|\mathcal{L}(h)\|_\infty \mathcal{L}(v)$, woraus wegen

$\mathcal{L}(v)(0) = \int_{\mathbb{R}^m_+} v(x)dx = 1$ folgt, daß $\|\mathcal{L}(g_\beta)\|_\infty = \mathcal{L}(g_\beta)(0)$ ist

für alle $\beta \in (-\pi,\pi]$. Also ist $\mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^m_+} g_\beta(x)f(x)dx \leq 0$.

Damit ist für alle $\beta \in (-\pi,\pi]$

$$\mathrm{Re}\Big(e^{i\beta}\int_{\mathbb{R}^m_+} h(x)f(x)dx - e^{i\beta}\int_{\mathbb{R}^m_+}\int_{\mathbb{R}^m_+} \mathring{h}(x-y)v(y)f(x)dydx\Big)$$

$$\leq \; - \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m_+} f(x)h(x)dx\,\|\mathcal{L}(h)\|_\infty$$, und weiter ist

$$\mathrm{Re}\Big(e^{i\beta}\Big(\int_{\mathbb{R}^m_+} h(x)f(x)dx - \int_{\mathbb{R}^m_+}\int_{\mathbb{R}^m_+} h(\xi)v(y)f(y+\xi)dyd\xi\Big)\Big) =$$

$$\mathrm{Re}\Big(e^{i\beta}\Big(\int_{\mathbb{R}^m_+} (f - f \circ v)(x)h(x)dx\Big)\Big) \leq -\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m_+} f(x)v(x)dx\,\|\mathcal{L}(h)\|_\infty .$$

(Hierbei war es wie beim Beweis von 6.3.(ii) wegen des Über- von $\mathring{h}$ nach h nicht nötig, den Integrationsbereich zu verschieben.)

Wählt man nun $\beta = -\arg\Big(\int_{\mathbb{R}^m_+}(f-f \circ v)(x)h(x)dx\Big)$, so ist

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^m_+}(f-f \circ v)(x)h(x)dx\Big| \leq \|\mathcal{L}(h)\|_\infty\,(-\mathrm{Re}(f \circ v)(0)) \quad (*) \quad ;$$

hierbei kann $h \in L^1_*$ beliebig angenommen werden .

2. Sei $\langle B,h\rangle := \int_{\mathbb{R}^m_+} (f-f\circ v)(x)h(x)dx$ für alle $h \in L^1_*$, so ist wegen (*) B ein lineares Funktional auf L^1_*, mit $|\langle B,h\rangle| \leq -\mathrm{Re}(f\circ v)(0)\|h\|_1$. Da nun L^1_* in L^1 dicht liegt bezüglich $\|\ \|_1$, gibt es eine eindeutige beschränkte Fortsetzung von B auf L^1 und somit ein $\varphi \in L^\infty$ mit $\langle B,h\rangle = \int_{\mathbb{R}^m_+}\varphi(x)h(x)dx$ für alle $h \in L^1_*$, woraus für alle $h \in L^1_*$ folgt: $\int_{\mathbb{R}^m_+}(f-f\circ v)(x)h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m_+}\varphi(x)h(x)dx$. Das heißt letztlich, daß $f-f\circ v = \varphi \in L^\infty$ ist, woraus der zweite Teil der Behauptung folgt. $\square$

6.6. <u>Lemma:</u> Ist $f \in L^\infty_{loc}$ integral dissipativ, so gibt es eine stetige Version $\tilde{f} \in Q$ von f.

<u>Beweis:</u> Sei $v \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R}^m_+)$ mit $\int_{\mathbb{R}^m_+}v(x)dx = 1$ und $v \geq 0$, so ist $f-f\circ v$ integral vollständig dissipativ (wegen 6.5.). Dazu gibt es nach 3.8. eine stetige Version φ. Wegen der Stetigkeit von $f\circ v$ ist somit $\tilde{f} := \varphi + f\circ v$ eine stetige Version von f und damit nach 6.4. auch dissipativ. $\square$

Mit diesen Mitteln läßt sich nun der folgende Satz beweisen:

6.7. <u>Satz:</u> $M \subset \mathfrak{M}$ ist kompakt und metrisierbar in der $\sigma(L^\infty_{loc},L^1_*)$ - Topologie.

<u>Beweis:</u> Es gilt nach 4.5., daß $M \subset \mathfrak{M}$ ist, und somit ist M metrisierbar in der $\sigma(L^\infty_{loc},L^1_*)$ - Topologie.
Es bleibt wegen 5.4. die Abgeschlossenheit von M im $\mathfrak{M}$ in dieser Topologie zu zeigen. Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M mit einem $\sigma(L^\infty_{loc},L^1_*)$- Grenzwert $f \in \mathfrak{M}$. Es folgt natürlich, daß f integral dissipativ ist und nach 6.6. auch eine stetige Version besitzt; also kann $f \in Q$ angenommen werden.

Nach 4.2.(iii) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}_+^m$:
$(\operatorname{Re} f_n(x+\vec{1}) \leq |x| - 1)$ und $(\operatorname{Re} f_n(x+\vec{1}) \geq -|x| - 1)$ und
$(|\operatorname{Im} f_n(x+\vec{1})| \leq |x|)$.
Wegen der Stetigkeit von f und dem Lebesgue-schen Integralsatz auf allen Kompakta von $\mathbb{R}_+^m$ gelten diese Abschätzungen auch für f. Es folgt somit, daß $f(\vec{1}) = -1$ und damit $f \in M$ ist. Dies zeigt, daß M abgeschlossen ist in der $\sigma(L^\infty_{loc}, L^1_*)$-Topologie. □

6.8. <u>Satz:</u> Jedes $f \in M$ läßt sich darstellen als Schwerpunkt eines von der Menge der Extrempunkte getragenen Wahrscheinlichkeitsmaßes.

<u>Beweis:</u> $M \subset \mathfrak{M}$ ist eine (schwach - * -) kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen separierten topologischen Raums.
M ist konvex und (schwach- * -) metrisierbar. Damit läßt sich der Satz von Choquet für den metrisierbaren Fall anwenden (siehe [3] Corollar 27.6 oder [1] Satz 3.24).
Daraus folgt die Behauptung. □

6.9. <u>Theorem:</u> Für alle $f \in Q$ gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} c = 0$, ein $a \in \mathbb{R}_+^m$ und ein $\mu \in M_b^+(\mathbb{R}_+^m \times (-\pi,\pi])$, so daß

$$f = 1_a + c + \int_{\mathbb{R}_+^m - \{0\}} \int_{(-\pi,\pi]} (e^{i\beta} \exp_z - 1 - e^{-\langle\vec{1},z\rangle} \sin\beta) \frac{\mu(dz,d\beta)}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta} .$$

(Dabei seien 1_a und $\exp_z$ die in § 2 beschriebenen Funktionen)
Diese Darstellung heißt Lévy - Chintschin - Darstellung von $f \in Q$.

<u>Beweis:</u> Die Behauptung folgt unmittelbar aus 4.2. , 4.4. und 6.8. . □

6.10. <u>Bemerkung:</u> Diese Darstellung ist nicht eindeutig, denn es ist $(\exp_z \cdot \cos\beta - 1) \frac{1}{1-e^{-\langle\vec{1},z\rangle}\cos\beta} = \frac{1}{2}(f_{z,\beta} + f_{z,-\beta}) =$

$= \left(\frac{1 - e^{-\langle \vec{1}, z\rangle}}{1-e^{-\langle \vec{1}, z\rangle}\cos\beta}\right)\cos\beta \; f_{z,0} + (1-\cos\beta)\frac{-1}{1-e^{-\langle \vec{1}, z\rangle}\cos\beta}$ für

$z \in R^m_+$ mit $z \neq 0$ und $\beta \in (-\pi,\pi]$. $\square$

Nachdem nun die Kompaktheit von M gezeigt wurde, und die Konsequenzen im Zusammenhang mit den Ergebnissen aus § 4 gezogen wurden, soll ein ähnliches Konzept für K erstellt werden, welches mit dem Theorem 6.21. die zu Theorem 6.9. analogen Ergebnisse für die $f \in F$ liefert.

6.11. <u>Definition:</u> (i) $f \in L^\infty_{loc}$ <u>heißt integral fast positiv definit</u>, wenn für alle $h \in L^1_*$ mit $h = \bar{h}$ und $\int_{R^m_+} h(x)dx = 0$ folgt, daß $\int_{R^m_+}\int_{R^m_+} f(x+y)h(x)h(y)dxdy \geq 0$ ist.

(ii) $\varphi \in L^\infty$ heißt <u>integral positiv definit</u>, wenn für alle $h \in L^1_*$ mit $h = \bar{h}$ gilt, daß $\int_{R^m_+}\int_{R^m_+} \varphi(x+y)h(x)h(y)dxdy \geq 0$ ist.

6.11'. <u>Bemerkung:</u> Diese Definition hängt offenbar nur von den Klassen ab.

6.12. <u>Lemma:</u> $f \in L^\infty_{loc}$ und $\varphi \in L^\infty$ seien stetig.

(i) f ist integral fast positiv definit genau dann, wenn f fast positiv definit ist.

(ii) φ ist integral positiv definit genau dann, wenn φ positiv definit ist.

<u>Beweis:</u> Dieser Beweis ist für (i) praktisch vollständig übertragbar auf (ii) (bei dem Beweis zu (ii) fallen die Überlegungen über $\int_{R^m_+} h(x)dx = 0$ weg).

Also beschränken wir uns darauf (i) zu zeigen:

1. Sei $f \in L^\infty_{loc}$ integral fast positiv definit und stetig.

Wir definieren nun $V_s := \mathbb{R}_+^m \cap (s\cdot\vec{1} - \mathbb{R}_+^m)$, welche für alle $s > 0$ 0- Umgebungen in $\mathbb{R}_+^m$ darstellen.

Seien für $n \in \mathbb{N}$ $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^m$ und $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$.

Dazu definieren wir $h_s(x) := \sum_{j=1}^{n} c_j (\frac{1}{s})^m 1_{(x_j+V_s)}(x)$ für alle $s > 0$, wobei auch hier wieder 1_A die Indikatorfunktion einer Menge $A \in \mathbb{R}_+^m$ bezeichnen soll.

Es ist $\int_{\mathbb{R}_+^m} h_s(x)dx = 0$ und $h_s \in L^1_*$ für alle $s > 0$.

Damit ist $\int_{\mathbb{R}_+^m}\int_{\mathbb{R}_+^m} f(x+y)h_s(x)h_s(y)dxdy \geq 0$ für alle $s > 0$.

Da nun $((\frac{1}{s})^m 1_{(x_j+V_s)})dx$ schwach gegen das Dirac-Maß in x_j konvergiert, und da f stetig ist, folgt für s gegen 0 :

$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i+x_j)c_ic_j \geq 0$.

Da die $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^m$ und $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ beliebig gewählt werden können, ist f fast positiv definit.

2. Sei nun $f \in L^\infty_{loc}$ fast positiv definit und stetig.

Es ist noch zu zeigen, daß f integral fast positiv definit ist.

Sei nun $h \in L^1_*$ mit $h = \mathrm{Re}h$ und $\int_{\mathbb{R}_+^m} h(x)dx = 0$.

Sei $I \subset \mathbb{R}_+^m$ kompakt mit $\text{Träger}(h) \subseteq I$.

Sei $s > 0$ beliebig, so gibt es dazu wegen der Stetigkeit von f ein $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n \in I$ und paarweise disjunkten Umgebungen U_j von x_j (für $j = 1,\dots,n$) mit $\bigcup_{j=1}^{n} U_j = I$, so daß für alle $i,j = 1,\dots,n$, alle $x \in U_i$ und $y \in U_j$ gilt:

$|f(x+y) - f(x_i+x_j)| < s$.

Daher gilt:

$$\int_{R_+^m}\int_{R_+^m} f(x+y)h(x)h(y)dydx = \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i+x_j)\int_{U_i} h(x)dx\int_{U_j} h(y)dy$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n}\int_{U_i}\int_{U_j}(f(x+y)-f(x_i+x_j))h(x)h(y)dxdy \quad .$$

Weil $\int_{R_+^m} h(x)dx = \sum_{j=1}^{n}\int_{U_j} h(x)dx = 0$ ist, ist die erste Summe im rechten Teil der Gleichung ≥ 0 .

Die zweite Summe ist betragsmäßig nach oben beschränkt durch $\varepsilon(\|h\|_1)^2$. Da nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt für ε gegen 0, daß f integral fast positiv definit ist.

(Für (ii) folgt das Ganze natürlich analog.) $\square$

6.13. <u>Bemerkung:</u> Im Sinne von 6.2. ist für alle $f \in L^\infty_{loc}$ und $h \in L^1_*$

$$\int_{R_+^m}\int_{R_+^m} f(x+y)h(x)h(y)dxdy = f\circ(h*h)(0) \; .$$

6.14. <u>Lemma:</u> Sei $f \in L^\infty_{loc}$ und $\varphi \in L^\infty$, und sei $h \in L^1_*$, so gilt:

(i) Ist f integral fast positiv definit, dann ist $f\circ(h*h)$ fast positiv definit.

(ii) Ist φ integral positiv definit, dann ist $\varphi\circ(h*h)$ positiv definit.

<u>Beweis:</u> Wie im Beweis von 6.12. genügt es auch hier wieder, (i) zu beweisen.

Mit $h \in L^1_*$ ist auch für alle $a \in R_+^m$ $h_{-a}: x \longmapsto \overset{\circ}{h}(x-a)$ in L^1_*.

Somit gilt für alle $x_1,\dots,x_n \in R_+^m$ und alle $c_1,\dots,c_n \in R$:

$H := \sum_{j=1}^{n} c_j h_{-x_j} \in L^1_*$; damit ist für $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ auch

$\int_{R_+^m} H(x)dx = 0$, woraus schließlich folgt, daß

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{R_+^m}\int_{R_+^m} f(x+y+x_i+x_j)h(x)h(y)dxdy = \int_{R_+^m}\int_{R_+^m} f(x+y)H(x)H(y)dxdy$$

≥ 0 ist.

Das heißt, daß f $(h*h)$ fast positiv definit ist.

Für (ii) folgt das ganze analog . □

6.15. <u>Bemerkung:</u> Sei $f \in L^{\infty}_{loc}$ fast positiv definit, stetig und nach oben beschränkt, und sei $v \in L^1_*$ mit $v \geq 0$ und $\int_{R^m_+} v(x)dx = 1$, so ist $f - (f\circ v)$ positiv definit, stetig und beschränkt.

<u>Beweis:</u> Nach 1.7. ist $\triangle_a f := f - f_a$ für alle $a \in R^m_+$ positiv definit und beschränkt . Nach 6.12.(ii) und 6.14.(ii) ist für alle $h \in L^1_*$ $(f-f_a)\circ(h*h)(0) \geq 0$ (für alle $a \in R^m_+$).

Also ist $\int_{R^m_+}((f-f_a)\circ(h*h)(0))v(a)da$

$$= f\circ(h*h)(0) - \int_{R^m_+}(f_a\circ(h*h)(0))v(a)da$$

$$= f\circ(h*h)(0) - (f\circ v)\circ(h*h)(0) \geq 0 \ .$$

Damit ist $(f-(f\circ v))$ integral positiv definit.

Wegen der Stetigkeit von f ist auch $f\circ v$ stetig, und wegen der Beschränktheit von $(f-f_a)_{a \in \text{Träger}(v)}$ ist auch $f-(f\circ v)$ beschränkt , weil der Träger von v kompakt ist.

Wegen 6.12.(ii) folgt damit die Behauptung. □

Nun müssen wir noch zeigen, daß integral positiv definite, wesentlich beschränkte Funktionen eine stetige Version besitzen. Vorab müssen wir dazu noch einige Bemerkungen machen:

6.16. <u>Definition und Bemerkung:</u> Sei $C := \{ f \in \mathcal{C}_*(R^m_+) \mid Ref = f \}$.

(i) Sei $f \in L^{\infty}$ integral positiv definit; dann definiert $(\ , \ )_f : C \times C \longrightarrow R$, $(g,h)_f := f\circ(g*h)(0)$ eine symmetrische, positive Bilinearform auf C .

(ii) Dazu definieren wir:

$N_f := \{ h \in C \mid (h,h)_f = 0 \}$ und $R_f := C/N_f$.

$(R_f, \sqrt{(\, , \,)_f})$ ist ein Prähilbertraum.

Für $h \in C$ bezeichne $h_f \in R_f$ die dazu gehörende Klasse.

(Es gilt natürlich für alle $g,h \in C$: $(g,h)_f = (g_f,h_f)_f$.)

H sei die Vervollständigung von R_f unter $\sqrt{(\, , \,)_f}$.

(Damit ist $(H,\sqrt{(\, , \,)_f})$ ein Hilbertraum, in dem R_f dicht liegt.)

(iii) Für alle $t \in R_+^m$ sei $S(t) : C \longrightarrow C$ durch $S(t)(h) := h_{-t}$ definiert, wobei $h_{-t}(x) := \overset{o}{h}(x-t)$ sei ($\overset{o}{h}$ sei dabei das gleiche wie in 6.2.(i)) .

Für alle $t \in R_+^m$ ist $S(t)$ damit ein linearer Operator.

6.16'.<u>Bemerkung:</u> In der Notation von 6.16. gilt:

(i) Für alle $g,h \in C$ ist $t \longmapsto (g,S(t)(h))_f$ stetig auf R_+^m .

(ii) Für alle $t \in R_+^m$ gilt : $S(t)(N_f) \subseteq N_f$.

(iii) Für alle $t \in R_+^m$ gibt es eine eindeutige stetige lineare Fortsetzung von $S(t)$ auf H, welche wir wieder $S(t)$ nennen wollen.

(iv) Für alle $\varphi, \psi \in H$ ist $t \longmapsto (\varphi,S(t)(\psi))_f$ stetig auf R_+^m.

<u>Beweis:</u> (i): Es ist $(g,S(t)(h))_f = \int_{R_+^m}\int_{R_+^m} f(x+y)g(x)\overset{o}{h}(y-t)dxdy$ woraus wegen der Stetigkeit von $\overset{o}{h}$ die Behauptung folgt.

(ii): Für $h \in C$ ist $t \longmapsto (S(t)(h),S(t)(h))_f = f \circ (h*h)(2t)$ wegen (i) stetig und wegen 6.14.(ii) positiv definit und nach oben beschränkt (durch $\|f\|_\infty(\|h\|_1)^2$). Ist nun $h \in N_f$, so ist $f\circ(h*h)(0) = 0$, woraus mit dem vorherigen folgt, daß $t \longmapsto (S(t)(h),S(t)(h))_f$ die 0-Abbildung ist, was heißt, daß $S(t)(h) \in N_f$ ist.

(iii): Wegen (ii) folgt, daß für alle $h,g \in C$ mit $g_f = h_f$ $(S(t)(h))_f = (S(t)(g))_f$ ist. Da nun für alle $h \in C$ wegen 6.14.(ii) $(S(t)(h),S(t)(h))_f = f\circ(h*h)(2t) \leq f\circ(h*h)(0)$ ist, folgt, daß $S(t)$ durch 1 in der Operatornorm auf R_f beschränkt ist. Da R_f dicht in H liegt, gibt es eine eindeutige lineare stetige Fortsetzung von $S(t)$ auf H.

(iv): Es gilt: $t \longmapsto (g,S(t)(h))_f$ ist stetig auf $\mathbb{R}_+^m$ für alle $g,h \in R_f$. Ist nun $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^m$ eine Folge, die gegen $t \in \mathbb{R}_+^m$ konvergiert, dann ist $G_n : H \longrightarrow \mathbb{R}$, $G_n(\alpha) := (g,S(t_n)(\alpha))_f$ eine Folge von gleichm.beschr., linearen und stetigen Funktionalen auf H, die in R_f gegen $h \longmapsto (g,S(t)(h))_f$ konvergiert. Wegen der Dichtheit von R_f in H folgt nach dem Satz von Banach- Steinhaus, daß auch $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(\alpha) = (g,S(t)(\alpha))_f$ für alle $\alpha \in H$ ist, woraus die Stetigkeit von $t \longmapsto (g,S(t)(\alpha))_f$ für alle $\alpha \in H$ folgt.

Sei nun $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^m$ wieder eine Folge, die gegen ein $t \in \mathbb{R}_+^m$ konvergiert, und sei $\alpha \in H$, so ist durch $A_n : H \longrightarrow \mathbb{R}$, $A_n(\gamma) := (\gamma,S(t_n)(\alpha))_f$ eine Folge linearer, stetiger und $|\,|$- beschränkter Funktionale auf H, die auf R_f gegen das Funktional $h \longmapsto (\gamma,S(t)(h))_f$ konvergiert. Mit den gleichen Argumenten wie oben folgt, daß $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(\alpha) = (\gamma,S(t)(\alpha))_f$ ist, woraus auch dabei folgt, daß $t \longmapsto (\gamma,S(t)(\alpha))_f$ stetig ist für alle $\gamma, \alpha \in H$. $\square$

6.17. <u>Lemma:</u> Ist $f \in L^\infty$ integral positiv definit, so existiert eine stetige Version $\tilde{f}$ von f.

<u>Beweis:</u> Sei $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Nullumgebungen mit $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{0\}$ und sei $g_n \in C$ mit Träger$(g_n) \subseteq V_n$, $\|g_n\|_1 = 1$ und $g_n \geq 0$. Da $f \in L^\infty$ ist, folgt, daß $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |(h,(g_n)_f)_f| < \infty$ ist für alle $h \in R_f$.

Es ist für alle $g,h \in C$ $(h_f,(g_n)_f)_f = \int_{\mathbb{R}_+^m} h(x) \int_{\mathbb{R}_+^m} g_n(y) f(x+y)\,dy\,dx$.

Da nun $x \longmapsto \int_{R_+^m} f(x+y)h(y)dy$ stetig ist, folgt, daß

$\lim\limits_{n\to\infty} (h_f,(g_n)_f)_f = \int_{R_+^m} f(x)h(x)dx$ ist.

Sei mit $G_n: H \to R$, $G_n(\beta) := (\beta,(g_n)_f)_f$ eine Folge linearer stetiger und offenbar beschränkter Funktionale auf H definiert, die auf der dichten Teilmenge R_f in H konvergiert. Nach dem Satz von Banach- Steinhaus besitzt diese Folge einen schwachen Limes in H. Da nun $(H)' = H$ ist, gibt es ein $\xi_0 \in H$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(\beta) = (\xi_0,\beta)_f$ für alle $\beta \in H$.

Desgleichen folgt für $S(t)(\xi_0)$ (wobei $t \in R_+^m$ ist) :

$$\begin{aligned}(h_f,S(t)(\xi_0))_f &= \lim_{n\to\infty}\int_{R_+^m}\int_{R_+^m} f(x+y)h(x)\overset{\circ}{g}_n(y-t)dxdy \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{R_+^m} g_n(y)\int_{R_+^m} f(x+y+t)h(x)dx\, dy \\ &= \int_{R_+^m} f(x+t)h(x)dx, \text{ für alle } h \in C .\end{aligned}$$

(Dabei sei $\overset{\circ}{g}_n$ genauso wie in 6.2.(i) definiert.)

Damit gilt also für alle $g,h \in C$:

$$(h_f,g_f)_f = \int_{R_+^m} (h_f,S(t)(\xi_0))_f g(t)dt \quad .$$

Da nun R_f dicht in H liegt, folgt daraus, daß für alle $g \in C$, daß $(\xi_0,g_f)_f = \int_{R_+^m} (\xi_0,S(t)(\xi_0))_f\, g(t)dt = \int_{R_+^m} f(x)g(x)dx$ ist. Daraus folgt ,daß $f = (\xi_0,S(t)(\xi_0))_f$ fast überall ist. Da wegen 6.16'.(iv) $t \longmapsto (\xi_0,S(t)(\xi_0))$ stetig ist, folgt die Behauptung . $\square$

Mit diesen Mitteln werden wir jetzt die Schwach - * - Kompaktheit und - Metrisierbarkeit von K beweisen:

6.18. <u>Bemerkung:</u> In der Notation von § 1 gilt :

(i) $K \subset \mathfrak{M}$, K ist metrisierbar in der $\sigma(L^\infty_{loc},L^1_*)$-Topologie.

(ii) $K = \left\{ f \in F \;\middle|\; f \leq 0,\ f|_{([0,1])^m} \geq -1,\ f|_{([1,2])^m} \leq -1 \right\}$.

<u>Beweis:</u> (i): Diese Aussage ist direkt aus 1.5. und 5.4. zu folgern.

(ii): Folgt unmittelbar aus 1.8. , 1.6. und 1.3.(iii) . $\square$

6.19. <u>Satz:</u> K ist schwach - * - kompakt.

<u>Beweis:</u> Nach 5.4. ist $\mathfrak{M}$ schwach - * - kompakt und - metrisierbar, und deshalb genügt es zu zeigen, daß eine Folge von Funktionen aus K, die in $\mathfrak{M}$ konvergiert, auch in K konvergiert.

Sei nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ eine Folge von Funktionen, mit dem schwach - * - Limes $f \in \mathfrak{M}$.

Für $h \in L^1_*$ mit $h=\tilde{h}$ und $\int_{\mathbb{R}^m_+} h(x)dx = 0$ ist $f_n \circ (h*h)(0) \geq 0$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der schwach - * - Konvergenz folgt, daß auch $f \circ (h*h)(0) \geq 0$ ist.

Also ist f integral fast positiv definit.

Nun zeigen wir mit Hilfe von 6.15. und 6.17., daß f eine stetige Version besitzt:

Sei nun $v \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R}^m_+)$ (also eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^m_+$ mit kompaktem Träger) mit $v \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^m_+} v(x)dx = 1$.

$(f_n \circ v)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert schwach - * gegen $f \circ v$.

Da nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ ist, ergibt sich nach 6.15. , 1.2.(iv) und 1.5. die Abschätzung:

$$|f_n - f_n \circ v| \leq |f_n(0)-(f_n \circ v)(0)| \leq |f_n(\tilde{1})| + |(f_n \circ v)(0)|$$
$$\leq 1 + \int_{\mathbb{R}^m_+} (2|x|+1)v(x)dx =: c < \infty \quad (\text{ für alle } n \in \mathbb{N} \ ) .$$

Da nun mit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f auch $(f_n-(f_n \circ v))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f -(f \circ v)$ in der schwach - * - Topologie konvergiert, folgt nach dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz auf allen Kompakta, daß auch $|f - (f \circ v)| \leq c$ fast überall ist. Also ist $f - (f \circ v) \in L^{\infty}$.

Außerdem sind die $f_n - (f_n \circ v)$ nach 6.15. positiv definit, woraus für alle $h \in L^1_*$ mit $h = \mathrm{Re}h$ wegen 6.12.(ii) gilt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $(f_n - (f_n \circ v))(h * h)(0) \geq 0$ ist, und somit muß wegen der schwach - * - Konvergenz auch $(f - (f \circ v))(h * h)(0) \geq 0$ sein.

Also ist auch $f - f \circ v$ integral positiv definit.

Nach 6.17. gibt es eine stetige Version φ von $f - (f \circ v)$.

Da nun auch $f \circ v$ stetig ist, ist $f = \varphi * (f \circ v) =: \tilde{f}$ fast überall. $\tilde{f}$ ist stetig und fast positiv definit (wegen 6.12.(i)) .

Es bleibt noch zu zeigen, daß f den determinierenden Abschätzungen für alle Elemente aus K gemäß 6.8.(ii) genügt.

Diese liefert aber schon der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz auf allen Kompakta, der auf die schwach - * - Konvergenz von f_n gegen $\tilde{f}$ anwendbar ist.

Es folgt somit, daß $\tilde{f} \in K$ ist. □

6.20. <u>Satz:</u> Jedes $f \in K$ läßt sich darstellen als Schwerpunkt eines von der Menge der Extrempunkte von K getragenen Wahrscheinlichkeitsmaßes .

<u>Beweis:</u> Nach 6.19. ist $(K, \sigma(L^{\infty}_{loc}, L^1_*))$ ein metrisierbarer, konvexer und kompakter Unterraum der lokalkonvexen, separierten topologischen Raums $\mathfrak{M}$.

Damit läßt sich der Satz von Choquet für den metrisierbaren Fall anwenden (siehe dazu [3] Corollar 27.6 oder [1] Satz 3.2.4.) , woraus die Behauptung unmittelbar folgt. □

6.21. <u>Theorem:</u> In der Notation von § 1 und § 2 gilt:

(i) Für alle $f \in F$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, ein $a \in \mathbb{R}_+^m$ und ein $\mu \in M_b^+(\mathbb{R}_+^m)$, so daß

$$f = 1_a + c + \int_{\mathbb{R}_+^m - \{0\}} \frac{\exp_z - 1}{1-e^{-\langle 1,z\rangle}} \mu(dz) \quad \text{ist.}$$

Diese Darstellung heißt Lévy- Chintschin- Darstellung von f.

(ii) $F_0 \subset Q$.

<u>Beweis:</u> (i): Folgt unmittelbar aus 1.9.(ii) und 6.20. .

(ii): Folgt unmittelbar aus 6.20. und 6.9., da die Extrempunkte von K in M liegen. □

6.22. <u>Lemma:</u> Die Darstellung 6.21.(i) ist eindeutig für alle $f \in F$.

<u>Beweis:</u> (Siehe dazu auch [2] Theorem 3.7 .)

Sei $f \in F$ mit $f = 1_a+c+ \int_{\mathbb{R}_+^m - \{0\}} (1-\exp_z) \frac{\mu(dz)}{1-e^{-\langle 1,z\rangle}}$.

Es ist leicht zu sehen, daß $c = f(0)$ ist.

Nach 1.2.(i) und 1.2.(iii) für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$ die Folge $((f(2^n x) - f(0))(2^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend und ≤ 0 .

Das heißt sie muß konvergieren . Definieren wir darum

$L(x) := \lim_{n\to\infty} (f(2^n x)-f(0))(2^{-n})$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$.

Es ist $L(0) = 0$, $L \leq 0$ und $2L(x)=L(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^m$.

L ist wegen der punktweisen Konvergenz ebenfalls fast positiv definit. Wegen 1.2.(vii) folgt damit für alle $x,y \in \mathbb{R}_+^m$:

$(L(x+y)-L(x)-L(y))^2 \leq (L(2x)-2L(x))(L(2y)-2L(y)) = 0$, woraus folgt, daß L linear ist.

Somit muß nach der Definition von L $L = 1_a$ sein, womit $a \in \mathbb{R}_+^m$ eindeutig festgelegt ist.

Weiterhin gilt, daß $f-f_\gamma$ nach 6.21.(ii) und 2.9.(ii) vollständig dissipativ und stetig und nach 3.8.(ii) und 3.11. Laplacetransformierte eines eindeutig festgelegten Maßes

$\varrho \in M_b(\mathbb{R}^m_+)$. Aus der Darstellung des f folgt aber, daß $\varrho = -\delta_0 l_a(T) + \mu|_{\mathbb{R}^m_+ - \{0\}}$ ist, woraus die Eindeutigkeit von $\mu|_{\mathbb{R}^m_+ - \{0\}}$ aus der von ϱ folgt. $\square$

<u>Bemerkungen zum Paragraphen 6 :</u>

In diesem Paragraphen steht - wie schon zuanfang angekündigt - die Integraldarstellung der $f \in Q$ und $f \in F$ im Vordergrund. Die Methode ist wie im Paragraphen 5 durch das Studium des Textes [5] von N. Drumm geprägt.

Zuerst entwickelt man eine Eigenschaft der Elemente $f \in Q$, die es erlaubt, Q in $\mathfrak{M}$ einzubetten (Definition 6.1. und Lemma 6.4.) .

Danach zeigt man, daß die Funktionen, die 6.1. genügen, eine stetige Version besitzen, die wiederum dissipativ ist.

Dies geschah mit dem Satz 6.6. und 6.3. .

Das erlaubt zusammen mit der Abschätzung von 4.2.(iii) zu zeigen, daß Q in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen und somit schwach - * - kompakt und - metrisierbar ist.

Der Satz 6.8. liefert dann die Integraldarstellung über den Satz von Choquet (für den metrisierbaren Fall). Damit läßt si sich dann die Lévy - Chintschin - Darstellung von Q im Theorem 6.9. verifizieren.

Für F ergibt sich dann ein ähnliches Konzept. Nur wird hierbei notwendig, ein entsprechendes Analogon zur Aussage des Satzes 3.8.(i) zu entwickeln.

Das erreichen wir über die sogenannte G.N.S. (Gelfand - Naimark - Segal) - Konstruktion, die uns im Lemma 6.17. das gewünschte Ergebnis liefert. Ich mußte diesen Beweis hier mit hineinbringen, weil ich keinen entsprechenden (für den

positiv definiten Fall in unserem Sinne) in der Literatur entdecken können.
Wie schon in den Bemerkungen zum Paragraphen 1 erwähnt, ist die Einschränkung " nach oben beschränkt " in unseren Untersuchungen sehr bedeutend. Allerdings war es schon einigermaßen umständlich, dies in die Beweisführung von 1.6. und 1.7. einzupassen. Also empfiehlt es sich auf die für den Paragraphen 6 entsprechende Eigenschaft "wesentlich nach oben beschränkt" erst gar nicht in das Konzept mit aufzunehmen, allerdings damit auf eine zu 6.6. analoge Aussage für den fast positiv definiten Fall zu verzichten.
Statt dessen wurde eine solche Aussage mit in den Beweis von Satz 6.19. eingebunden (= dem Analogon zu 6.7.), da dort das Inventar an Vorraussetzungen größer ist.
Mit diesem Satz ermöglicht sich dann ebenfalls eine Darstellung nach Choquet im Satz 6.20., die dann schließlich in der Lévy - Chintschin - Darstellung für Funktionen aus F endet (Theorem 6.21.).
Die Aussage von 6.21.(ii) soll uns noch einmal verdeutlichen, wie die Mengen F und Q zusammenhängen.

§ 7 Folgerungen:

Mit den Theoremen 6.9. und 6.21. werden wir nun einige Sätze der Maßtheorie beweisen:

Dazu aber noch einige Vorbemerkungen:

7.1. Definition: Sei $\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m_+)$ der Banachraum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^m_+$, die samt ihren ersten Ableitungen auf $\mathbb{R}^m_+$ beziehungsweise auf $((0,\infty))^m$ beschränkt sind, und deren rechtsseitigen Ableitungen auf dem Rand von $\mathbb{R}^m_+$ existieren, versehen mit der Norm $\|f\|^1 := \|f\|_\infty + \max_{j=1,\dots,m} \|\frac{df}{dx_j}\|_\infty$ (für alle $f \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m_+)$).

Sei A ein lineares, stetiges Funktional auf $\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m_+)$.

(i) Ist A reellwertig und gilt für alle $f \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m_+)$ mit $f(0) = 0$ und $f \geq 0$, daß $\langle A,f\rangle \geq 0$ ist, so heißt A fast positiv.

(ii) Ist A komplexwertig und gilt für alle $f \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m_+)$ mit $f(0) = \|f\|_\infty$, daß $\mathrm{Re}\langle A,f\rangle \leq 0$, so heißt A dissipativ.

(iii) A heißt straff, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m_+$ gibt, so daß für alle $f \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m_+)$ mit $f|_{K_\varepsilon} = 0$ und $\|f\|_\infty \leq 1$, folgt: $|\langle A,f\rangle| \leq \varepsilon$.

7.2. Bemerkung: Die Menge der linearen, stetigen und straffen Funktionale auf $\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m_+)$, die

(i) fast positiv definit sind, bilden den konvexen Kegel $\mathfrak{F}$ -

(ii) dissipativ sind, bilden den konvexen Kegel $\mathfrak{Q}$.

Mit diesen Mitteln lassen sich folgende Sätze formulieren:

7.3. Satz: Die Laplacetransformation ist ein (Kegel-) Isomorphismus zwischen $\mathfrak{F}$ und F beziehungsweise $\mathfrak{Q}$ und Q .

Beweis: Es ist leicht zu zeigen, daß für $A \in \mathfrak{F}$ bzw. $A \in \mathfrak{Q}$ $\mathcal{L}(A) \in F$ bzw. $\mathcal{L}(A) \in Q$ ist. Die Surjektivität folgt aus dem Theorem 6.21. bzw. 6.9. , wonach alle $f \in F$ bzw. $f \in Q$ sich schreiben lassen als $f = \mathcal{L}(A)$ mit

$$A = \delta_0 c - \langle \triangle_0^+, a \rangle - \int_{R_+^m - \{0\}} \frac{\delta_0 - \delta_z}{1 - e^{-\langle \vec{1}, z \rangle}} \mu(dz) \quad \text{bzw.}$$

$$A = \delta_0 c - \langle \triangle_0^+, a \rangle + \int_{R_+^m - \{0\}} \int_{(-\pi,\pi]} \frac{e^{i\beta}\delta_z - \delta_0(1 - i e^{-\langle \vec{1}, z \rangle} \sin\beta)}{1 - e^{-\langle \vec{1}, z \rangle} \cos\beta} \mu(dz, d\beta),$$

wobei $c \in R$, $a \in R_+^m$ und $\mu \in M_b^+(R_+^m)$ bzw. $c \in C$ mit $\operatorname{Re} c = 0$, $a \in R_+^m$ und $\mu \in M_b^+(R_+^m \times (-\pi,\pi])$ ist (- dabei bezeichne δ_z das Dirac-Maß in $z \in R_+^m$ und $\triangle_0^+$ den linearen stetigen Operator $f \mapsto \delta_0(\nabla f)$ auf $\mathcal{C}_b^1(R_+^m)$).

Es läßt sich leicht zeigen, daß $A \in \mathcal{F}$ bzw. $A \in \mathcal{Q}$ ist.

Wegen der Injektivität der Laplacetransformation für temperierte Distributionen auf R_+^m folgt die Behauptung. □

<u>Bemerkung:</u> Der Satz 7.3. stellt damit ein Analogon zum Satz von Bochner - Waldenfels für die Laplacetransformation auf R_+^m dar (- vergleiche dazu [4a] 8.4.Korollar und [11] Satz 1.).

7.4. <u>Satz:</u> Ist f fast positiv definit, stetig und beschränkt, so ist f die Summe der Laplacetransformierten eines positiven, beschränkten Maßes $\mu \in M_b^+(R_+^m)$ mit $\mu(\{0\}) = 0$ und einer Konstanten $c = \inf_{x \in R_+^m} f(x)$.

<u>Beweis:</u> Sei f fast positiv definit, stetig und beschränkt. Damit ist $(f(n \cdot \vec{1} + z))_{n \in N}$ eine monoton fallende Folge in R (- wegen 1.2.(vi) -), die beschränkt ist. Somit hat diese Folge einen Grenzwert in $c_z \in R$ (- für alle $z \in R_+^m$).
Da aber nun für alle $y \in R_+^m$ ein $y' \in R_+^m$ existiert mit $y + y' = n\vec{1} + z$ für geeignet großes $n \in N$, folgt wegen 1.2.(vi), $f(y) \geq c_z \geq \inf_{x \in R_+^m} f(x)$ ist. Da nun $z \in R_+^m$ beliebig gewählt werden kann, muß $c_z = \inf_{x \in R_+^m} f(x)$ sein .

Sei also $c := \inf_{x \in \mathbb{R}_+^m} f(x)$. Damit konvergiert die Folge $(f - f_{\frac{\to}{n1}})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f-c$ punktweise. $f-c$ ist wiederum stetig. Da wegen 1.7. alle $f - f_{\frac{\to}{n1}}$ positiv definit und beschränkt sind, muß auch $f-c$ positiv definit sein.

Andererseits gibt es nach 6.21.(i) ein $\nu \in M_b^+(\mathbb{R}_+^m)$ mit $f = f(0) + \int_{\mathbb{R}_+^m - \{0\}} \frac{\exp_z - 1}{1-e^{-\langle \vec{1}, z \rangle}} \nu(dz)$ (der Linearanteil von f wird natürlich wegen der Beschränktheit verschwinden).

Es folgt natürlich, daß $c = \lim_{n \to \infty} f_{\frac{\to}{n1}} = f(0) - \int_{\mathbb{R}_+^m - \{0\}} \frac{\nu(dz)}{1-e^{-\langle \vec{1}, z \rangle}}$ ist, was uns schließlich $f-c = \int_{\mathbb{R}_+^m - \{0\}} \frac{\exp_z}{1-e^{-\langle \vec{1}, z \rangle}} \nu(dz)$ liefert.

Setzt man nun $\mu := \left(\left(\frac{1}{1 - \exp_{\vec{1}}} \right) 1_{(\mathbb{R}_+^m - \{0\})} \right) \nu$, so ist

$f = \mathcal{L}(\mu) + c$.

(Hierbei bezeichne 1_A wieder die Indikatorfunktion einer Menge $A \subset \mathbb{R}_+^m$.)

Da nun $\|\mu\| \leq f(0) - c$ ist, folgt die Behauptung. □

<u>Bemerkung:</u> Dieser Satz wurde in [10] von P.Ressel schon einmal mit Hilfe der Theorie der Momente bewiesen.

7.5. <u>Satz:</u> Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionalen aus $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+^m)$, deren Laplacetransformierten (f_n) punktweise gegen eine im Nullpunkt stetige Funktion f konvergieren, so konvergieren diese A_n punktweise auf $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+^m)$ gegen ein $A \in \mathcal{F}$ mit $f = \mathcal{L}(A)$.

<u>Beweis:</u> 1. Zuerst zeigen wir, daß f_n $\sigma(L_{loc}^\infty, L_*^1)$-konvergiert gegen eine stetige Version von f :

Da f stetig in 0 ist, gibt es zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $y \in ((0,\infty))^m$, so daß $|f(0) - f(y)| < \varepsilon'$ ist.

Andererseits gibt es zu allen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt, daß $|f_n(y)-f(y)| < \varepsilon$ und $|f_n(0)-f(0)| < \varepsilon$ ist. Damit ist für alle $n \geq n_0$:

(i) $g_n := f_n - f(0) - 2\varepsilon \in F_0$ und (ii) $|g_n(y)| < \varepsilon' + 2\varepsilon$.

Es folgt wegen 6.21.(iii), daß $g_n \in Q$ ist für alle $n \geq n_0$.

Mit 2.23. gilt damit, daß $g_n \circ A_y \in Q$ und $|g_n \circ A_y(\widehat{1})| \leq \varepsilon' + 2\varepsilon$ ist, woraus mit der Existenz von $(A_y)^{-1}$ und mit 4.5. folgt, daß es ein $c > 0$ gibt mit $|g_n(\widehat{1})| \leq c$ für alle $n \geq n_0$.

Nun ist $K_c := \{ f \in F_0 \mid f(\widehat{1}) \leq c \} \subset c\mathfrak{M}$ und somit wegen 6.12.(i), 6.21.(ii) und 6.6. natürlich $\sigma(L^\infty_{loc}, L^1_*)$ - kompakt und - metrisierbar. Natürlich ist $(g_n)_{n \geq n_0} \in K_c$.

Wegen der punktweisen Konvergenz der f_n gegen f konvergiert natürlich auch g_n gegen ein stetiges $g \in K_c$, welches eine Version von $f - f(0) - 2\varepsilon$ ist. Damit konvergiert f_n in $\sigma(L^\infty_{loc}, L^1_*)$ gegen ein $\tilde{f} := g + f(0) + 2\varepsilon$. Wegen der Stetigkeit von f in 0 folgt aus dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz (auf einem geeigneten Kompaktum um 0), daß $\tilde{f}(0) = f(0)$ ist.

2. Damit werden wir zeigen, daß A_n für n gegen ∞ gegen A punktweise auf $\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m_+)$ konvergieren. (Trivialerweise folgt die punktweise Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\mathcal{L}(A)$.)

Wegen 7.3. und 6.21. folgt:

$$A_n = f_n(0)\delta_0 - \langle \triangle_0^+, a_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^m_+ - \{0\}} \frac{\delta_z - \delta_0}{1 - e^{-\langle \widehat{1}, z \rangle}} \, \mu_n(dz) \quad \text{mit}$$

$a_n \in \mathbb{R}^m_+$ und $\mu_n \in M_b^+(\mathbb{R}^m_+)$; und weiter gibt es wegen 6.21.(i) ein $a \in \mathbb{R}^m_+$ und $\mu \in M_b^+(\mathbb{R}^m_+)$, so daß $\tilde{f} = \mathcal{L}(A)$ ist mit

$$A = \tilde{f}(0)\delta_0 - \langle \triangle_0^+, a \rangle + \int_{\mathbb{R}^m_+ - \{0\}} \frac{\delta_z - \delta_0}{1 - e^{-\langle \widehat{1}, z \rangle}} \, \mu(dz) \ .$$

Wie wir gesehen haben, ist $\tilde{f}(0) = f(0)$, woraus folgt, daß

(2.a) $\delta_0 f_n(0)$ gegen $\delta_0 f(0)$ Bernoulli- konvergiert (für $n \to \infty$).

Da nun für alle $\varphi \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+^m)$ gilt, daß $\frac{\varphi - \varphi(0)}{1-\exp_{\tilde{1}}}$ stetig und beschränkt ist auf $\mathbb{R}_+^m - \{0\}$, ist noch zu zeigen, daß $(1_{(\mathbb{R}_+^m-\{0\})})\mu_n$ schwach gegen $(1_{(\mathbb{R}_+^m-\{0\})})\mu$ konvergiert.
(Dabei sei 1_A die Indikatorfunktion von $A \subset \mathbb{R}_+^m$.)
Da nun für alle $n \in \mathbb{N}$ $f_n-(f_n)_{\tilde{1}}$ positiv definit ist (wegen 1.7.), ist nach 7.4. $f_n-(f_n)_{\tilde{1}} = \langle \tilde{1}, a_n\rangle + \int_{\mathbb{R}_+^m-\{0\}} \exp_z \mu_n(dz)$.

Da nun $(f_n-(f_n)_1)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt sind – wie wir gesehen haben –, so muß auch $(\delta_0\langle\tilde{1},a_n\rangle + (1_{(\mathbb{R}_+^m-\{0\})})\mu_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt sein. Das heißt, daß diese Folge in einem Bernoulli-Kompaktum von $M_b^+(\mathbb{R}_+^m)$ liegt, woraus wegen der $\sigma(L^\infty_{loc}, L^1_*)$- Konvergenz von f_n gegen $\tilde{f}$ auch die Bernoulli - Konvergenz von $(\delta_0\langle 1,a_n\rangle + (1_{(\mathbb{R}_+^m-\{0\})})\mu_n)$ für n gegen ∞ gegen $(\delta_0\langle\tilde{1},a\rangle + (1_{(\mathbb{R}_+^m-\{0\})})\mu)$ folgt. Das heißt,
(2.b) daß $((1_{(\mathbb{R}_+^m-\{0\})})\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $(1_{(\mathbb{R}_+^m-\{0\})})\mu$ Bernoulli-konvergiert.

Definiert man nun $L_n := f_n + \int_{\mathbb{R}_+^m-\{0\}} \frac{1-\exp_z}{1-e^{-\langle\tilde{1},z\rangle}}\mu_n(dz) - f_n(0)$,

so ist $L_n = l_{a_n}$, und damit konvergiert $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\sigma(L^\infty_{loc}, L^1_*)$ gegen $L := \tilde{f}_n + \int_{\mathbb{R}_+^m-\{0\}} \frac{1-\exp_z}{1-e^{-\langle\tilde{1},z\rangle}}\mu(dz) - \tilde{f}(0) = l_a$, wonach $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L$ fast überall ist .

Damit konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a , womit auch
(2.c) $(\langle\Delta_0^+, a_n\rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ punktw. gegen $\langle\Delta_0^+, a\rangle$ konvergiert auf $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+^m)$.

Zusammen mit (2.a) und (2.b) folgt damit die Behauptung. $\square$

<u>Bemerkung:</u> In dieser Version stellt dieser Satz den von Lévy-Waldenfels für die Laplacetransformation auf R_+^m dar.
(Siehe dazu auch [4a] 2.8 und 8.5 oder [11] Satz 1.(ii) .)

§ 8 Schlußbemerkungen:

Am Ende dieser Arbeit möchte ich noch die Möglichkeit der Verallgemeinerung dieses Konzepts diskutieren.
Hierbei will ich die schon in den Bemerkungen zu den vorangegangenen Paragraphen erwähnte Erweiterung unserer Ergebnisse auf topologische, abelsche Halbgruppen mit neutralem Element und den entsprechenden fast positiv definiten bzw. dissipativen Funktionen darauf kurz beleuchten.
Hernach möchte ich bestimmte lokalkompakte, konvexe Kegel in R^m unter diesem Aspekt betrachten und die möglichen Konsequenzen daraus andeuten.

Zuerst ist eine Begriffsbildung analog zu der in den Paragraphen 1 und 2 notwendig:
Sei $(H,+)$ eine topologische, additiv geschriebene abelsche Halbgruppe mit neutralem Element. $H^\wedge$ beschreibe die zu H gehörende Menge der reellen, stetigen Semicharaktere (= den Homomorphismen von H in die multiplikative Halbgruppe $([0,1],\cdot)$ =), die bezüglich der punktweisen Multiplikation eine abelsche Halbgruppe mit der Einsabbildung $\bar{e}$ als Neutralem bilden.
Analog zu 2.1. definieren wir den Raum von Testfunktionen:

$$\Theta_H := \Big\{ t: H^\wedge \to C \;\Big\|\; \exists\, n \in N\, \exists\, c_1,\dots,c_n \in C\, \exists\, x_1,\dots,x_n\ H\, \forall\, \beta \in H^\wedge: t(\beta) = \sum_{j=1}^{n} c_j \beta(x_j) \Big\} .$$

Damit läßt sich die Dissipativität auf H definieren:
Eine Funktion $f: H \to C$ heißt <u>dissipativ</u> auf H, wenn für alle $t \in \Theta_H$ mit $t(\beta) = \sum_{j=1}^{n} c_j \beta(x_j)$ und $t(e) \geq |t(\beta)|$ für alle $\beta \in H^\wedge$ gilt, daß $\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} c_j f(x_j) \leq 0$ ist.

Der Begriff der fast positiven Definitheit auf H ergibt sich genauso wie in 1.1.(i) :

Eine Funktion $f: H \to \mathbb{R}$ heißt <u>fast positiv definit auf H</u>, wenn für alle n-Tupel $(c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{R}^n$ und $(x_1,\dots,x_n) \in H^n$ mit $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ folgt, daß $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_i c_j f(x_i+x_j) \geq 0$ ist.

Es ist leicht zu zeigen, daß diese Eigenschaft für $H = \mathbb{R}_+^m$ äquivalent sind zu den in Paragraphen 1 und 2 gefaßten.

Beschränkt man sich auf konvexe (spitze) Kegel $\overset{o}{K}$ des $\mathbb{R}^m$, so kann o.w.E. angenommen werden, daß die Dimension des Kegels maximal ist. Es gibt damit eine Basis von m linear unabhängiger Vektoren $a_1,\dots,a_m$ in $\overset{o}{K}$, so daß

$\overset{o}{K} \supseteq K := \left\{ \sum_{j=1}^{m} x_j a_j \;\middle|\; x_1,\dots,x_m \geq 0 \right\}$ ist.

Seien nun K^* und $\overset{o}{K}{}^*$ die zu K und $\overset{o}{K}$ gehörenden Halbgruppen von Semicharakteren mit neutralem Element $\bar{e}$.

Es gilt : $K^* \supseteq \overset{o}{K}{}^*$. Folglich ist $\Theta_{\overset{o}{K}} \supseteq \Theta_K$, und damit gilt für $t \in \Theta_K$ mit $t(\bar{e}) \geq |t(\beta)|$ für alle $\beta \in K^*$, daß dies auch für alle $\beta \in \overset{o}{K}{}^*$ gilt.

Folglich sind dissipative Funktionen auf $\overset{o}{K}$ auch dissipativ auf K.

Trivialerweise folgt dies auch für die Eigenschaft "fast positiv definit".

Da nun $K = \left\{ \sum_{j=1}^{m} x_j a_j \;\middle|\; x_1,\dots,x_m \geq 0 \right\}$ ist, gibt es einen Isomorphismus A von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$ mit $A(\mathbb{R}_+^m) = K$ und $A(e_j) = a_j$ für $j=1,\dots,m$ (- wobei e_j den j-ten Einheitsvektor von $\mathbb{R}^m$ beschreibt).

Da nun für alle $\beta \in K^*$ gilt, daß $\beta \circ A \in (\mathbb{R}_+^m)^*$ ist, gibt es ein $z \in \mathbb{R}_+^m$ mit $\beta \circ A = \exp_z$.

Ist nun $t \in T$ (siehe § 2) mit $t = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp_{x_j}$ und $t(0) \geq |t(z)|$ für alle $z \in \mathbb{R}_+^m$, so sei $\tilde{t}: K^* \to \mathbb{C}$ definiert durch
$\tilde{t}(\beta) := \sum_{j=1}^{n} c_j \beta(A(x_j))$.

Sei nun $\beta \in K^*$ beliebig und $\beta \circ A = \exp_z$ für ein $z \in \mathbb{R}_+^m$, so gilt: $|\tilde{t}(\beta)| = |t(z)| \leq t(0) = \tilde{t}(\bar{e})$.
Ist nun $f: K \to \mathbb{C}$ dissipativ auf K, so gilt deshalb für alle $t \in T$ mit $t = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp_{x_j}$, daß $\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} c_j f(A(x_j)) \geq 0$ ist, woraus folgt, daß $f \circ A$ dissipativ auf $\mathbb{R}_+^m$ ist.
Trivialerweise folgt ebenfalls, daß fast positiv definite Funtionen auf K unter der vorgeschalteten Transformation A fast positiv auf $\mathbb{R}_+^m$ sind.
Damit lassen sich die Ergebnisse von Paragraph 1 bis 7 auf eine fast positiv definite, nach oben beschränkte bzw. ein dissipative, stetige Funktion f auf K durch $f \circ A$ übertragen.
In diesem Zusammenhang ist vielleicht noch eines erwäheneswert: Da A ein Isomorphismus ist, gibt es ein A^{-1} und die zu A adjungierte, invertierte Abbildung $(A^*)^{-1}$. Es ist leicht zu zeigen, daß $\{\exp_{(A^*)^{-1}(z)} \mid z \in \mathbb{R}_+^m\} = K^*$ ist.
Mit den oben angestellten Überlegungen heißt das zum Beispiel für dissipative, stetige Funktionen auf K :

Ist $f: K \to \mathbb{C}$ dissipativ und stetig auf K, dann gibt es eine $c \in \mathbb{R}$, eine lineare, nach oben beschränkten reelle Funktion l auf K und ein positives Maß μ auf $K^* \times (-\pi, \pi]$ mit
$\int_{K^*} \int_{(-\pi,\pi]} (1 - \rho(A(\bar{1}))\cos\beta)\, \mu(d\beta, d\rho) < \infty$, so daß
$f = ic + l + \int_{K^* - \{\bar{e}\}} \int_{(-\pi,\pi]} (e^{i\beta}\rho - \bar{e})\, \mu(d\beta, d\rho)$ ist.

Diese Darstellung ergibt sich aus der von f∘A aus dem Theorem 6.9. nach einigen Umformungen.
(Man vergleiche dazu [2] Theorem 3.7 , wo dieses Konzept für fast positiv definite, negative (nicht unbedingt stetige) Funktionen auf beliebigen Halbgruppen erarbeitet wurde.)
Im allgemeineren Falle ist die Situation nicht so klar.
Als erste, mögliche Verallgemeinerungen kann man betrachten:

1. Beliebige (spitze) Kegel des R^n .

Dazu empfiehlt es sich, sich mit den Theorien über Semicharaktere auseinanderzusetzen. Dazu empfiehlt sich unter anderem die Lektüre von J.H. Williamson's "Survey Article Harmonic Analysis on Semigroups " aus Proc. London Math. Soc. 42, 1- 41 (1967) .

2. Choquet - Kegel in unendlich dimensionalen Räumen.

In diesem Zusammenhang erscheint folgende Arbeit von E. Dettweiler richtungsweisend zu sein:
" The Laplace Transform of Measures on the Cone of a Vector Lattice " , Math. Scand. 45 (1979), pp 311 - 333 .

3. Diskrete reguläre abelsche Halbgruppen.

Auch hierbei wird man genötigt sein, sich mit den Semicharakteren auseinanderzusetzen. Dabei empfiehlt sich wiederum, den schon oben angegebenen Text von Williamson zu studieren.
Der Text [2] könnte zudem methodisch Hilfestellung leisten, um die Ergebnisse zu liefern, welche hier in den Paragraphen 2 bis 6 für R_+^m erarbeitet wurden.

<u>Indexverzeichnis</u> (der paragraphenübergreifenden Kürzel)

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^m_+)$	bezeichne die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^m_+$	2.3'.
$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m_+)$	$:= \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m_+) \mid f$ ist beschränkt $\}$	2.3'.
$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m_+)$	$:= \{ f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m_+) \mid f$ verschwindet im unendlichen $\}$	3.1.
$\mathcal{C}_*(\mathbb{R}^m_+)$	$:= \{ f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m_+) \mid f$ besitzt kompakten Träger $\}$	3.3.
$\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m_+)$	$:= \{ f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m_+) \mid \frac{df}{dx_j} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m_+)$ für $1 \leq j \leq m \}$	7.1.
e_j	bezeichne den j-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^m$ für $j=1,\ldots,m$	1.10.
$\exp_z$	$: \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\exp_z(x) := e^{-\langle x,z \rangle}$ für ein $z \in \mathbb{R}^m_+$	§ 2
F	bezeichne die Menge der stetigen, nach oben beschränkten fast positiv definiten Funktionen auf $\mathbb{R}^m_+$	1.8.
F_0	$:= \{ f \in F \mid f(0) \leq 0 \}$	1.8.
K	$:= \{ f \in F_0 \mid f(\widehat{1}) = -1 \}$	1.8.
$\mathcal{L}$	bezeichne die Laplacetransformation	
l_z	$: \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $l_z(x) := -\langle x,z \rangle$ für ein $z \in \mathbb{R}^m_+$	2.17.
L^1	$:= \{ f: \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{C} \mid f$ ist meßbar und $\int_{\mathbb{R}^m_+} \lvert f(x) \rvert \, dx < \infty \}$	3.1.
L^1_*	$:= \{ f \in L^1 \mid$ Träger(f) ist bis auf Nullmenge kompakt $\}$	5.1.
L^∞	bezeichne die Menge aller Äquivalenzklassen von meßbaren wesentlich beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}^m_+$	3.1.
L^∞_{loc}	bezeichne den Dualraum von L^1_* (siehe auch 5.1'.)	5.1.
M	$:= \{ f \in P \mid f(\widehat{1}) = -1 \}$	4.1.
$M_b(A)$	bezeichne die Menge aller beschränkten Borelmaße auf der σ-Algebra der Borelmengen eines lokalkompakten Hausdorffraums A .	
$M_b^+(A)$	$:= \{ \beta \in M_b(A) \mid \beta$ ist ein positives beschränktes Maß $\}$	
P	$:= \{ f \in Q \mid f(\widehat{1}) \in \mathbb{R} \}$	4.1.

Q	bezeichne die Menge der dissipativen, stetigen Funktionen auf R_+^m	2.3.
R_+^m	$:= ([0,\infty))^m$	
Θ	bezeichne den Raum der exponentiellen Funktionen auf auf R_+^m	2.1.
T	$:= \left\{ t \in \Theta \,\middle\|\, t(0)=\\|t\\|_\infty \right\}$	2.1.
U	bezeichne die Menge der stetigen, vollständig dissipativen Funktionen auf R_+^m	2.3.
Π	$:= (-\pi, \pi]$	2.19.
$\mathbb{1}$	$:=(1,\ldots,1) \in R_+^m$	1.8.
$\\|f\\|_1$	$:= \int_{R_+^m} \|f(x)\| \, dx$ (Norm auf L^1)	3.1.
$\\|f\\|_\infty$	$:= \text{ess sup} \|f\|$ (Norm auf L^∞ und $\mathcal{C}_b(R_+^m)$)	
$\mathfrak{M}$	- Siehe § 5 .	

Literaturverzeichnis:

[1] Bauer,H.: Konvexität in topologischen Vektorräumen , Ausarbeitung einer Vorlesung, gehalten an der Universität Hamburg (1964) .

[2] Berg,C.;Christensen,J.P.R.;Ressel,P. : Positive Definite Functions on Abelian Semigroups , Math.Ann. 223 , 259-272 (1976).

[3] Choquet,G.: Lectures on Analysis , Vol. 2 , Benjamin Inc. New York (1969).

[4] Drisch,Th.: Der Satz von Bochner - Sazonov für fast positive Funktionale auf separablen Hilbert - Räumen , Universität Dortmund, Habilitationsschrift (1979).

[4a] Drisch,Th.: Ein neuer Zugang zur Theorie schwach stetiger Faltungshalbgruppen mit Hilfe des Satzes vom Bochnerschen Typ , Universität Dortmund , Manuskript (Anhang zur Habilitationsschrift ([4])) (1977) .

[5] Drumm,N.: Die Lévy - Chintschin - Formel als Choquetsche Integraldarstellung , Universität Saarbrücken , Dissertationsschrift (1976) .

[6] Duflo,M.: Semigroups of Complex Measures on a Locally Compact Group , Lecture Notes in Mathematics Vol.466 , 56-64 Springer Verl. Heidelberg (1974) .

[7] Faraut,J.: Semi - groupes de measure complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitesimaux de semi - groupes d'opérateurs , Ann.Inst.Fourier, Grenoble, 20 . 235-301 (1970).

[8] Florett,K.;Wloka,J.: Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume , Springer Verl. Heidelberg (1968) .

[9] Johannsen,S.: An Application of Extreme Point Methods to the Representation of infinitely divisible Distributions ,

Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Geb. 5 , 304- 316 (1966) .

Ressel,P.: Laplacetransformation nichtnegativer und vektorwertiger Maße , Manuskripta Math. 13 , 143- 152 (1974) .

Waldenfels,W.von : Die Sätze von Bochner und Levy für fast positive Funktionale , Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 13 , 215- 220 (1969) .